ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

Ю. Н. Горелов (Самара, ИПУСС РАН). **Об одном подходе к решению задачи оптимального управления многомерными линейными системами.**

Рассматривается управляемая линейная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \tag{1}$$

которая является прямой суммой следующих объектов управления:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_k u_k + \mathbf{f}_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^n$ $(\sum_{k=1}^m n_k = n\,,\ \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_k})$, $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,\{\mathbf{A}_k\}_m$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}\,\{\mathbf{b}_k\}_m$, $\mathbf{u} = \mathrm{col}\,(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$ — вектор управляющих параметров, пары $\{\mathbf{A}_k, \mathbf{b}_k\}$ — вполне управляемые для всех $k = 1, 2, \ldots, m$, а $\mathbf{f} = \mathrm{col}\,(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{R}^n$ $(\mathbf{f}_k \in \mathbf{R}^{n_k})$ — некоторая заданная вектор-функция, с помощью которой, в частности, могут моделироваться перекрестные связи между подсистемами (2) в составе (1).

Для заданных граничных условий

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \tag{3}$$

задача управления (1), (3) на интервале $[t_0, t_f]$ — двухточечная граничная задача, сводящаяся при минимизации функционалов типа нормы в $L_q[t_0, t_f]$ $(q = 1, 2, \infty)$ к решению оптимальной проблемы моментов в L_p, где $1/p + 1/q = 1$. Моментные равенства здесь имеют вид $\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \mathbf{c}$, где $\mathbf{\Phi}(t_f, \tau)$ — переходная матрица системы (1), а вектор $\mathbf{c}$ вычисляется так: $\mathbf{c} = \mathbf{x}^f - \mathbf{\Phi}(t_f, t_0)\mathbf{x}^0 - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{f}(\tau)\,d\tau$. Решение указанной проблемы моментов с помощью принципа максимума Н. Н. Красовского [1, 2] сводится к последовательному решению следующих двух задач:

$$\text{А}_0: \qquad \rho_0 = \min_{\mathbf{l}^T\mathbf{c}=1} \|\mathbf{l}^T\mathbf{\Phi}(t_f, \cdot)\mathbf{B}\|_{L_p}^{(\nu)} = \|\mathbf{h}_0(\cdot)\|_{L_p}^{(\nu)}, \tag{4}$$

$$\text{Б}_0: \qquad \max_{\|\mathbf{u}(\cdot)\|_{L_q}^{(\mu)} = \rho_0^{-1}} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}_0^T(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{h}_0^T(\tau)\widetilde{\mathbf{u}}(\tau)\,d\tau = 1, \tag{5}$$

где $\widetilde{\mathbf{u}}(\tau)$ — оптимальное управление. В (4), (5) $\mathbf{l}_0^T\mathbf{c} = 1$ и, соответственно, $\mathbf{h}_0^T(\cdot) = \mathbf{l}_0^T\mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B} = [h_{10}(\tau)| \ldots |h_{m0}(\tau)]$, $\|\mathbf{h}(\cdot)\|_{L_p}^{(\nu)} = (\int_{t_0}^{t_f} (\|\mathbf{h}(\tau)\|_\nu)^p\,d\tau)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$, $\|\mathbf{h}(\cdot)\|_{L_\infty}^{(\nu)} = \max_{\tau\in[t_0,t_f]} \|\mathbf{h}(\tau)\|_\nu$, $\|\mathbf{h}(\tau)\|_\nu$ — векторная норма ($\nu = 1, 2, \infty$), $1/\nu + 1/\mu = 1$. Кроме того, предполагается, что для граничных условий (3) выполняется условие $\|\mathbf{c}\|_\nu > 0$.

Соответственно, для граничных условий подсистем (2), задаваемых, исходя из условий (3),

$$\mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{x}_k^0, \quad \mathbf{x}_(t_f) = \mathbf{x}_k^f, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

также можно рассматривать парциальные задачи оптимального управления для (2), (6) с функционалами типа нормы $J_k = \|u_k(\cdot)\|_{L_q}$ и можно сформулировать соответствующие проблемы моментов в L_p, которые сводятся к решению следующих пар задач $(k = 1, 2 \ldots, m)$:

$$\text{А}_k: \qquad \pi_k = \min_{\xi_k^T \mathbf{c}_k = 1} \|\xi_k^T \mathbf{\Phi}_k(t_f, \cdot)\mathbf{b}_k\|_{L_p} = \min_{\xi_k^T \mathbf{c}_k = 1} \|\xi_k^T \mathbf{g}_k(\cdot)\|_{L_p} = \|g_{k0}(\cdot)\|_{L_p}, \tag{7}$$

$$\text{Б}_k: \qquad \max_{\|u_k(\cdot)\|_{L_q} = 1/\pi_k} = \int\limits_{t_0}^{t_f} g_{k0}(\tau) u_k(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_f} g_{k0}(\tau) u_k^*(\tau)\, d\tau = 1, \tag{8}$$

где $u_k^*(\tau)$ — оптимальное управление, $\mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau)$ — переходные матрицы для объектов управления (2), а векторы $\mathbf{c}_k$ вычисляются по формулам $\mathbf{c}_k = \mathbf{x}_k^f - \mathbf{\Phi}_k(t_f, t_0)\mathbf{x}_k^0 - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau)\mathbf{f}_k(\tau)\, d\tau$, $\|\mathbf{c}_k\|_\nu \geqslant 0$; если $\mathbf{c}_k = 0$, то управление k-м объектом (2) не требуется, т. е. $u_k(\tau) = 0$ для любого $\tau \in [t_0, t_f]$, поскольку в этом случае граничные условия для него удовлетворяются автоматически. Отметим также, что $g_{k0}(\tau) = \xi_{k0}^T \mathbf{g}_k(\tau)$, $\xi_{k0}^T \mathbf{c}_k = 1$, и по определению (1) и (2): $\mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B} = \operatorname{diag}\{\mathbf{\Phi}_k(t_f, \tau)\mathbf{b}_k\}_m = \operatorname{diag}\{\mathbf{g}_k(\tau)\}_m$.

В настоящем сообщении рассматривается задача о сведении проблемы моментов А$_0$, Б$_0$ (4), (5) к решению задач А$_k$, Б$_k$ (7), (8) ($k = 1, 2, \ldots, m$) и синтезе на их основе решения задачи оптимального управления для (1), (3). Показано, что только в следующих случаях, когда $p, \nu = 2$ ($q, \mu = 2$), $p, \nu = 1$ ($q, \mu = \infty$) и $p, \nu = \infty$ ($q, \mu = 1$), решения задач (7), (8) суть парциальные компоненты решения для задачи (4), (5). В иных возможных вариантах постановок задач (4), (5), когда $p \neq \nu$, решения задач (7), (8), как правило, можно рассматривать только как соответствующие приближения к решению задачи оптимального управления (1), (3) с соответствующим функционалом типа нормы в рамках принципа Сандерса [3]. Соответствующий подход рассматривался в [4] для решения задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата, и по результатам моделирования была установлена его высокая эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением: линейные системы. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. *Мороз А. И.* Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987, 304 с.
3. *Цурков В. И.* Динамические задачи большой размерности. М.: Наука, 1988, 288 с.
4. *Горелов Ю. Н.*, *Данилов С. Б.*, *Тропкина Е. А.* Об одном подходе к приближенному решению задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 429–431.