ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

М. М. К р у ч е к (Петрозаводск, ПетрГУ). **Асимптотический доверительный интервал квантили гамма-распределения при случайном числе независимых наблюдений.**

Важность решения традиционных задач математической статистики при условии, что число наблюдений является реализацией целочисленной случайной величины, отмечается многими авторами [1, 2]. С необходимостью учитывать случайный характер объема доступной информации приходится сталкиваться в задачах теории надежности, страховой и финансовой математики, при статистическом моделировании медикобиологических систем. В финансовой инженерии широко используется такая мера риска, как VaR (Value at Risk). Мера риска VaR на уровне p финансовой позиции X с распределением $\mathbf{P}$ определяется как $\inf\{m \in \mathbf{R} \,|\, \mathbf{P}\{m + X < 0\} \leqslant p\}$ и с математической точки зрения является квантилью порядка p распределения случайной величины X. Наряду с простотой и легкостью в применении, используемые в финансовой инженерии методологии вычисления VaR обладают существенным недостатком — опираются на предположение о нормальности распределения и не учитывают случайный характер количества регистрируемых событий, что приводит к недооценке риска. Представляет интерес задача оценивания квантилей распределений, адекватно моделирующих характеристики страхового и финансового рисков, в частности, гамма распределения.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые наблюдения, имеющие гамма-распределение $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ с неизвестным параметром масштаба $\alpha > 0$ и известным параметром формы $\lambda > 0$. Для квантили $x_p(\Gamma_{\alpha,\lambda})$ порядка p распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ справедливо равенство $x_p(\Gamma_{\alpha,\lambda}) = \alpha^{-1} x_p(\Gamma_{1,\lambda})$. В качестве точечной оценки квантили выберем несмещенную статистику $\widehat{x}_{p,n}(\Gamma_{\alpha,\lambda}) = S_n(\lambda n)^{-1} x_p(\Gamma_{1,\lambda})$, $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$, являющуюся асимптотически нормальной оценкой $x_p(\Gamma_{\alpha,\lambda})$ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\alpha) = x_p^2(\Gamma_{1,\lambda})/(\lambda\alpha^2)$.

Предположим, что для каждого $n \geqslant 1$ случайная величина N_n имеет отрицательно биномиальное распределение с параметрами $1/n$ и $r > 0$ и $N_n, X_1, X_2, \ldots$, определенные на $(\Omega, \mathcal{F})$, независимы относительно каждой из семейства мер $\{P_\alpha\}$.

Теорема. *Пусть случайные величины* $N_n, X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют приведенным выше условиям. Тогда при каждом* $\alpha > 0$ *для заданного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P_\alpha\left\{\frac{\widehat{x}_{p,N_n}(\Gamma_{\alpha,\lambda})\sqrt{\lambda r n}}{\sqrt{\lambda r n} - t_{\varepsilon/2}} < x_p(\Gamma_{\alpha,\lambda}) < \frac{\widehat{x}_{p,N_n}(\Gamma_{\alpha,\lambda})\sqrt{\lambda r n}}{\sqrt{\lambda r n} + t_{\varepsilon/2}}\right\} = 1 - \varepsilon,$$

где $t_{\varepsilon/2}$ *— квантиль распределения Стьюдента порядка* $\varepsilon/2$.

Доказательство существенно опирается на результаты и методы, изложенные в [1, 2].

Выбор отрицательного биномиального распределения в качестве распределения числа наблюдений объясняется, в частности, тем, что оно относится к классу смешанных пуассоновских распределений (со смешивающим гамма-распределением) и явля-

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

ется хорошей моделью распределения числа информативных событий в задачах страховой и актуарной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений. — Теория вероятностей и математическая статистика, т. 92, с. 146–150.
2. *Королев В. Ю.*, *Бенинг В. Е.*, *Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.