ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2012

З. О. Бесланеев, С. А. Бутенков (Нальчик, КБГУ, Таганрог, ЮФУ). **Конструирование численных методов на гранулах.**

Рассмотрим классическую задачу приближенного вычисления интегралов [1]. Интервал интегрирования $[a,b]$ разбивают на n частей узлами $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} = b$. Обычно в курсе численных методов рассматривается задача на сетке с равномерно заданными узлами (методы Ньютона–Котеса) $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k f(x_k) + R(x), \tag{1}$$

где c_k — коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида подынтегральной функции, $R(x)$ — остаточный член, определяющий погрешность усечения квадратурной формулы (1).

Для неравномерно заданных узлов (что позволяет уменьшить погрешность усечения в соответствии с характером подынтегральной функции) квадратурные формулы (1) значительно усложняются [1]. Выбор узлов может диктоваться исходной моделью объекта на основе теории информационной грануляции (ТИГ) [2]. Для таких задач используются модели гранул, на которые разбивается интервал $[a,b]$, в полуалгебраической форме [2, 3]. Гранулированные модели инкапсулируют сверху и снизу криволинейную трапецию, образуемую графиком подынтегральной функции на заданном интервале. Введены общие выражения мер на гранулах с помощью определителей миноров базовых элементов модели. Меры на двумерной грануле G_2, имеющие очевидный геометрический смысл, задаются в виде

$$\eta_G^1 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}, \quad \eta_G^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Используя алгебраичность моделей (2), можно получить компактные представления для квадратурных формул на гранулах. Для формулы правых прямоугольников получаем следующее компактное выражение для всего гранулирования отрезка интегрирования на основе (2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k f(x_{k+1}) & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f(x_{k+1}) & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f(x_{k+1}) & 1 & 1 \end{vmatrix} + R(x). \tag{3}$$

Соответственно, для формулы левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k) & 1 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k) & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{k+1} f(x_k) & 0 & 1 \end{vmatrix} + R(x). \tag{4}$$

Квадратурные формулы прямоугольников на гранулах (3), (4) имеют первый порядок точности [1] и требуют n вычислений подынтегральной функции в узлах. Можно на основании (2)–(4) получить формулу средних прямоугольников на гранулированном представлении интервала интегрирования в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2x_k f\Big(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_k + x_{k+1}) f\Big(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) & 0 & 1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_k + x_{k+1}) f\Big(\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) & 1 & 1 \end{vmatrix} + R(x). \tag{5}$$

Как и классическая формула средних прямоугольников, формула (5) имеет порядок точности не хуже второго [1]. Введенные квадратурные формулы позволяют выполнять интегрирование непосредственно на моделях гранул, а также переходить к кубатурным формулам [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989, 432 с.
2. *Бутенков С. А.* Алгебраические модели в задачах интеллектуального анализа многомерных данных. — В сб.: Труды международной научно-технической конференции: Математическая теория систем 2009 (МТС-2009). Москва, 26–30 января 2009, с. 93–101.
3. *Бесланеев З. О.* Интеллектуализация моделирования процессов представления и обработки данных. — В сб.: Труды Конгресса по интеллектуальным технологиям IS-IT'12, т. metricconverterProductID3, М3. М.: Физматлит, 2012, с. 221–225.