

Т о м 19

Рассмотрим $\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{s_1+s_2+\dots+s_n})$ — упорядоченное разбиение числа r на s_1 слагаемых, равных 1, s_2 слагаемых, равных 2, и т. д., s_n слагаемых, равных целому числу $n \geq 2$, причем $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = r$, где r, s_i — целые неотрицательные числа ($i = 1, 2, \dots, n$). Слагаемому, равному i , приписывается вес d_i . Под *весом разбиения* понимается произведение весов образующих его слагаемых. Обозначим $\Delta_{t_1, t_2, \dots, t_m} = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{t_1+t_2+\dots+t_m})$ упорядоченное разбиение числа r на t_1 слагаемых, равных 1 и имеющих вес b_1 , t_2 слагаемых, равных 2 и имеющих вес b_2 , и т. д., t_m слагаемых с весом b_m , равных целому числу $m \geq 2$, причем $t_1 + 2t_2 + \dots + mt_m = r$, где t_j — целые неотрицательные числа ($j = 1, 2, \dots, m$).

Последовательность действительных чисел $(z_k)_{k=0}^{\infty}$ называют *осциллирующей*, если для всех неотрицательных чисел k она удовлетворяет условиям: если $z_k > 0$, то $z_{k+1} \leq z_k$; если $z_k \leq 0$, то $z_{k+1} \geq z_k$. Положим $sg(z) = 1$ при $z > 0$ и $sg(z) = 0$ при $z \leq 0$, $\overline{sg}(z) = 1 - sg(z)$.

$$z_0 = z, \quad z_k = z_{k-1} - sg(z_{k-1})y_{sg(z_0)+\dots+sg(z_{k-1})} + \overline{sg}(z_{k-1})x_{\overline{sg}(z_0)+\dots+\overline{sg}(z_{k-1})}, \quad (1)$$

Пусть $l(k)$ — такое наименьшее натуральное число, что $\overline{sg}(z_0) + \dots + \overline{sg}(z_{l(k)-1}) = k$. Тогда упорядоченную пару (δ_k, δ_{k+1}) соседних элементов разбиения $\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n}$ назовем *парой типа* нн, если $z_{l(k)} \leq 0$ и $z_{l(k+1)} \leq 0$, *парой типа* вн, если $z_{l(k)} \leq 0$ и $z_{l(k+1)} > 0$, *парой типа* вв, если $z_{l(k)} > 0$ и $z_{l(k+1)} \leq 0$, *парой типа* вв, если $z_{l(k)} > 0$ и $z_{l(k+1)} > 0$. Аналогично классифицируем упорядоченные пары $(\delta'_k, \delta'_{k+1})$ соседних элементов разбиения $\Delta_{t_1, t_2, \dots, t_m}$, заменяя функцию $l(k)$ функцией $h(k)$, где $h(k)$ — такое наименьшее натуральное число, что $sg(z_0) + \dots + sg(z_{h(k)-1}) = k$.

Задачу вычисления производящей функции

$$F(x, u_{\text{нн}}, u_{\text{нв}}, u_{\text{вн}}, u_{\text{вв}}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^r \sum_{i_2=0}^r \sum_{i_3=0}^r \sum_{i_4=0}^r w_{r,i_1,i_2,i_3,i_4} u_{\text{нн}}^{i_1} u_{\text{нв}}^{i_2} u_{\text{вн}}^{i_3} u_{\text{вв}}^{i_4} x^r,$$

где w_{r,i_1,i_2,i_3,i_4} — сумма весов разбиений $\bar{\Delta}_r = (\Delta_{s_1,s_2,\dots,s_n}, \Delta_{t_1,t_2,\dots,t_m})$, в которых i_1 пар типа нн, i_2 пар типа нв, i_3 пар типа вн, i_4 пар типа вв, удается решить при помощи метода «трансфер-матрицы» [1, с. 354–356] отыскания весов путей в орграфе. Полученный результат выражает следующая теорема.

Теорема. Для любых целых m, n ($m \geq 2, n \geq 2$) справедлива следующая формула:

$$F(x, u_{\text{нн}}, u_{\text{нв}}, u_{\text{вн}}, u_{\text{вв}}) = \det R_{m,m} / \det R,$$

где R — матрица порядка m вида

$$\begin{pmatrix} 1 + A_{11} & D_1 + A_{12} & D_2 + A_{13} & \dots & D_{m-2} + A_{1,m-1} & D_{m-1} + A_{1,m} \\ A_{21} & 1 + A_{22} & D_1 + A_{23} & \dots & D_{m-3} + A_{2,m-1} & D_{m-2} + A_{2,m} \\ A_{31} & A_{32} & 1 + A_{33} & \dots & D_{m-4} + A_{3,m-1} & D_{m-3} + A_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} & \dots & 1 + A_{m-1,m-1} & D_1 + A_{m-1,m} \\ A_{m,1} & A_{m,2} & A_{m,3} & \dots & A_{m,m-1} & 1 + A_{m,m} \end{pmatrix},$$

$$D_i = -d_i u_{\text{нн}} x, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad A_{ij} = -u_{\text{вн}} u_{\text{нв}} \sum_{s=m-i+1}^n d_s \sum_{t=m-j+1}^m b_t f_{s-t+i-j},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$f_s = f_s(b_1, b_2, \dots, b_m, u_{\text{вв}}, x) = \begin{cases} (b_1 f_{s-1} + b_2 f_{s-2} + \dots + b_m f_{s-m}) u_{\text{вв}} x, & s > 0, \\ x, & s = 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

матрица $R_{m,m}$ получается из R вычеркиванием m -й строки и m -го столбца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стенли Р. П. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.