О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20   М А Т Е М А Т И К И   В ы п у с к 2
2013

В. М. К о р ч е в с к и й (Санкт-Петербург, СПбГУАП). **Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин с конечными дисперсиями.**

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин. Обозначим $S_{a,n} = \sum_{i=a+1}^{a+n} X_i$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $S_n = S_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n\}$ *— последовательность случайных величин с конечными дисперсиями и выполнены условия*

$$\mathbf{D}\, S_{a,n} \leqslant C \sum_{i=a+1}^{a+n} \mathbf{D}\, X_i \quad \textit{для всех достаточно больших } a \textit{ и } n \geqslant 1\,, \tag{1}$$

где C *— некоторая постоянная, и* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\, X_n \log^2 n < \infty$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbf{E}\, X_n)$ *сходится п. н.*

Теорема 1 обобщает один результат из [1], доказанный при более ограничительных предположениях о зависимости между случайными величинами рассматриваемой последовательности.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n\}$ *— последовательность случайных величин с конечными дисперсиями,* $\{b_n\}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* $1 < q \leqslant b_{2n}/b_n \leqslant Q$ *для всех достаточно больших* n, *где* q *и* Q *— некоторые постоянные. Если выполнены условия* (1) *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}\, X_n b_n^{-2} \log^2 n < \infty$, *то*

$$\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{b_n} \to 0 \qquad \textit{п. н.} \tag{2}$$

Теорема 2 обобщает основной результат из [2], соответствующий случаю $b_n = n$.

Следуя [3], будем использовать обозначение Ψ_c для множества таких функций $\psi(x)$, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum (n\psi(n))^{-1}$ сходится.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n\}$ *— последовательность случайных величин с конечными дисперсиями,* $\{b_n\}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* $b_{2n}/b_n \leqslant Q$, *где* Q *— некоторая постоянная. Если выполнены условия* $\mathbf{D}\, S_{a,k} + \mathbf{D}\, S_{a+k,m} \leqslant \mathbf{D}\, S_{a,k+m}$ *для всех* $a \geqslant 0$, $1 \leqslant k < k+m$ *и*

$$\mathbf{D}\, S_n = O\left(\frac{b_n^2}{\psi(n)\log^2 n}\right) \quad \textit{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c,$$

то имеет место соотношение (2) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dae-Hee Ryu.* The almost sure convergence of weighted averages under negative quadrant dependence. — J. Appl. Math. & Informatics, 2009, v. 27, № 3–4, p. 885–893.
2. *Корчевский В. М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности случайных величин без предположения о независимости. — Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1, 2011, в. 4, с. 38–41.
3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.