ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

О. А. Изотова (Рославль, филиал ФГБОУ ВПО «МГИУ»). **Случайные аналитические функции и их обобщения для моделирования краевых задач плоской теории упругости, учитывающих случайный фактор.**

Теория аналитических функций комплексного переменного, как известно, является хорошо разработанным разделом высшей математики, важным с точки зрения ее приложений. Отметим, что успех в разработке плоских задач теории упругости объясняется привлечением к их рассмотрению теории аналитических функций. Благодаря работам Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили было показано, что задачи плоской теории упругости, моделирующие напряженное состояние упругого тела, могут быть эффективно решены с помощью функций вида

$$F(z)=\varphi_0(z)+\overline{z}\varphi_1(z), \qquad (*)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ — аналитические функции.

Функции вида $(*)$ относятся к бианалитическим функциям и являются частным случаем полианалитических функций, которые, в свою очередь, представляют обобщение аналитических функций.

Напомним определения полианалитических функций в областях D^+ и D^-, а также определение кусочно-полианалитической функции [2], которые используются в классических краевых задачах плоской теории упругости.

Определение 1. *Полианалитической функцией* $F_n^+(z)$ *порядка* n *в области* D^+ называется функция вида $F_n^+(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k^+(z)$, где $z=x-iy$, $\varphi_k^+(z)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ — аналитические в области D^+ функции, называемые *аналитическими компонентами* полианалитической функции.

Определение 2. *Полианалитической в бесконечной области* D^- *функцией* $F_n^-(z)$ *порядка* n называется функция вида $F_n^-(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k^-(z)$, где $\varphi_k^-(z)=z^{-k}f_k^-(z)$, $f_k^-(z)$ — аналитические в области D^- функции.

Определение 3. *Кусочно-полианалитической функцией порядка* n *с линией скачков* L называется функция $F(z)$, если она в двух дополняющих друг друга до полной плоскости областях D^+ и D^-, разделенных контуром L, определяется выражением

$$F(z)=\begin{cases}F^+(z), & z\in D^+,\\ F^-(z), & z\in D^-,\end{cases}$$

где

$$F^+(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k^+(z),\quad F^-(z)=f_0^-(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k z^{-k-1}f_k^-(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z}^k\varphi_k^-(z),$$

$\varphi_k^+(z)$, $f_k^-(z)$ — аналитические в областях D^+ и D^- соответственно функции, кроме того, $\varphi_0^-(z)=f_0^-(z)$, $\varphi_j^-(z)=z^{-j-1}f_j^-(z)$, $j\geqslant 1$.

О п р е д е л е н и е 4. Функции $\varphi_0^{\pm}(z), \varphi_1^{\pm}(z), \ldots, \varphi_{n-1}^{\pm}(z)$ называют *аналитическими компонентами* соответствующей полианалитической функции.

В то же время, при моделировании упругого состояния систем тел, находящихся под воздействием случайных факторов, классического аппарата краевых задач для аналитических функций и их обобщений недостаточно. Это связано с тем, что традиционно в краевых задачах полагается, что коэффициенты, входящие в граничные условия, — это детерминированные функции, принадлежащие пространству функций Гельдера [1]. Практика показывает, что в природе не существует совершенно неслучайных, в точности детерминированных процессов. Как правило, большинство процессов реальной действительности – случайные процессы. Следовательно, при решении краевых задач плоской теории упругости этот факт надо учитывать, а классические аналитические функции рассматривать как частный случай случайных аналитических функций.

Если в определениях 1, 2 и 3 положить функции $\varphi_i^{\pm}(z)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, случайными функциями, то получим определение случайной полианалитической функции, которую можно рассматривать как полином относительно переменной $\overline{z}$ с коэффициентами, представляющими случайные аналитические компоненты.

Для однозначного определения случайной полианалитической функции порядка n необходимо и достаточно определить ее случайные аналитические компоненты. Если в определении случайной полианалитической функции положить $n = 2$, то получим случайную бианалитическую функцию [3].

В заключение добавим, что интеграл типа Коши [1], который активно используется как математический аппарат для решения краевых задач теории аналитических функций, а также задач плоской теории упругости, представляет собой функцию аналитическую. Следовательно, возрастает интерес к аналитическим функциям и их обобщениям как к случайным функциям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966.
2. *Юденков А. В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002, 268 с.
3. *Изотова О. А.* Исследование основных краевых задач в классе случайных бианалитических функций. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т.7, в. 3, с. 415–416.