О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 20   М А Т Е М А Т И К И   В ы п у с к 3
2013

А. М. И о н о в а, **Е. А. У т к и н а** (Ульяновск, УлГПУ, Казань, КФУ).
Вероятность на проекторах в пространстве с сопряжением.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $B(H)$ — множество всех ограниченных операторов в H. Оператор $J\colon H\to H$ называется *оператором сопряжения*, если $J^2=I$ и $(Jx,Jy)=(y,x)$ для любых $x,y\in H$. Вектор $x\in H$ назовем *вещественным*, если $Jx=x$. Заметим, что векторы $x_{\mathrm{Re}}=(x+Jx)/2$ и $x_{\mathrm{Im}}=(x-Jx)/(2i)$ — вещественные. При этом $x=x_{\mathrm{Re}}+ix_{\mathrm{Im}}$ и $\|x\|^2=\|x_{\mathrm{Re}}\|^2+\|x_{\mathrm{Im}}\|^2$. Определим произведение $<x,y>:=(Jx,y)$, $x,y\in H$. Проектор (=идемпотент) $p\in B(H)$ назовем J*-проектором*, если $<px,y>=<x,py>$. Последнее равенство равносильно $p=Jp^*J$.

Любой одномерный J-проектор имеет вид $(\cdot,Jx)x$, где $\|x_{\mathrm{Re}}\|^2-\|x_{\mathrm{Im}}\|^2=1$ и $(x_{\mathrm{Re}},x_{\mathrm{Im}})=0$.

Пусть B^{co} — множество всех J-проекторов. Относительно порядка $p\leqslant q\ \Leftrightarrow\ pq=p$, ортогональности $p\perp q\Leftrightarrow pq=0$ и перехода к ортодополнению $p^{\perp}:=I-p$ множество B^{co} — квантовая логика. Если H бесконечномерно или имеет четную размерность, то существует такой ортогональный проектор F, что $F+JFJ=I$ и $(Fx,JFy)=0$ для любых $x,y\in H$. J-проектор, коммутирующий с F, назовем J*-проектором типа* (B). Любой минимальный J-проектор типа (B) имеет размерность 2 и вид $(\cdot,x)y+(\cdot,Jy)Jx$, где $(x,y)=1$ и $x,y\in FH$. Множество $P\subseteq B^{co}$ всех J-проекторов типа (B) образует квантовую логику.

Отображение $\mu\colon P\to R$ называется *мерой*, если $\mu(p)=\sum_i\mu(p_i)$ для любого представления $p=\sum_i p_i$ при любых $p_i\in H$. Неотрицательная мера μ называется *вероятностью*, если $\mu(I)=1$.

Следующая теорема доказывает, что вероятности на логиках типа (B) и типа (A) устроены одинаково (см. [1]).

Теорема 1. *Отображение* $\mu\colon P\to[0,1]$ *— вероятность тогда и только тогда, когда* $n=\dim H<+\infty$ *и* $\mu(p)=n^{-1}\mathrm{tr}\,(p)$ *для любых* p.

Теорема 2. *Пусть* $\dim H=\infty$ *и* $\mu\colon P\to R$ *— мера. Тогда существует такой ядерный оператор* T, *что* $\mu(p)=\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(Tp)$ *для любых* p.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matvejchuk M. S.* Probablity measures in W^*J-algebras in Hilbert spaces with conjugation. — Proceeding of the Amer. Math. Soc., 1998, v. 126, № 4, p. 1155–1164.