ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Л. И. М и р о н о в а (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Термонапряженное состояние цилиндрической оболочки в условиях действия переменного температурного поля в наклонной плоскости к ее оси.**

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую оболочку со свободными торцами в условиях действия переменного температурного поля в наклонной плоскости к ее продольной оси (см. рис. 1). Такую задачу мы считаем одним из случаев плоской задачи для цилиндрической оболочки, рассмотренной в [1]. Температурное поле характеризуется координатным параметром β и есть функция $T(\beta)$, где β — координата кривой эллипса в сечении плоскости действия температурного фактора, наклоненной на угол θ к продольной оси цилиндрической оболочки.

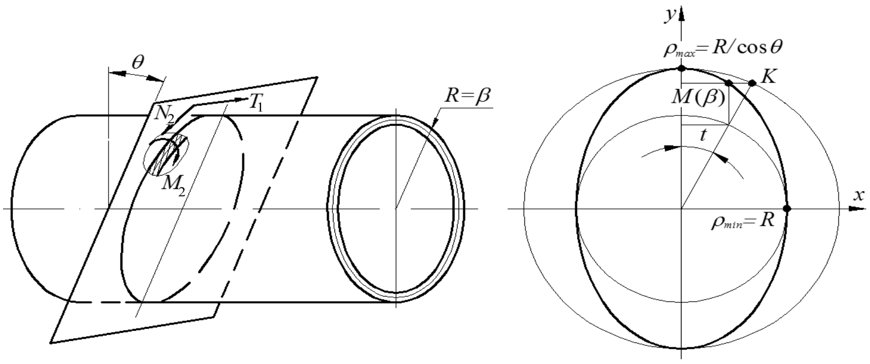

Рис. 1. Расчетная схема

Граничные условия формулируются следующим образом: $\partial t/\partial\gamma = 0$, $T_{(+h)} = T_{(-h)} = \text{const}$. Приведем решение задачи для $\theta = 0$.

Соотношения функции температуры, связанной с функцией прогиба, имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\beta^2} + w_0 - \alpha_t(1+\nu)T + \frac{\alpha_t\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\,d\beta_0 + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi}\int_0^{2\pi} T\,\cos(\beta-\beta_0)\,d\beta_0 = 0,\\ \int_0^{2\pi}(w_0-\alpha_t T)\,d\beta = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Сформулируем следующую вариационную задачу: найти экстремум функционала упругой энергии на множестве функций $w_0(\beta)$ и $T(\beta)$, каждая из которых удовлетворяет соотношениям (1), дополнительным ограничениям на функцию прогибов в сечениях $\beta = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вида $w_0(\beta_i) = a_{1i}$, $\int_0^{2\pi} w_0(\beta)\,d\beta = a_{0i}$, и обеспечивает стационарность функционалов

$$K_1 = \int_0^{2\pi} w_0\delta(\beta-\beta_i)\,d\beta_0; \quad K_2 = \int_0^{2\pi}\theta(\beta_i-\beta)w_0\,d\beta_0; \quad K_1 = a_{1i}, \ \ K_2 = a_{0i}.$$

Из общего решения вариационной задачи выделим такое экстремальное температурное поле, которое удовлетворяет условиям на поверхности $T(\pi) = T_1$, $T_0(-\beta_1) = T_0(+\beta_1) = 0$, $T'(\pi) = 0$, $2\pi - \beta_1 \leqslant \beta_1(0) \leqslant 0 + \beta_1$, $0 \leqslant (+\beta_1) \leqslant \pi$, $\pi \leqslant (-\beta_1) \leqslant 2\pi$. При этом температурное поле определяется соотношением [1]

$$T_1 = T_0 \frac{\cos\beta_1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta}. \tag{2}$$

Используем полученное решение (2) как частный случай рассматриваемой задачи, в которой угол наклона плоскости $\theta = 0$, а радиус цилиндрической оболочки есть радиус кривизны $\rho(\beta)$ полученной в сечении геометрической фигуры. Используя параметрическое уравнение эллипса получим $T_1 = T_0(A)$:

$$A = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t \cos^2\theta}}{\cos\theta} \frac{\cos\beta - \cos\beta_1}{1 + \cos\beta_1},$$

где A есть координата единичной функции температурного поля $t_0 = f(A)$, действующего в наклонной плоскости сечения цилиндрической оболочки к ее продольной оси. Ниже приведен график изменения параметра t_0 при $\theta = 45^\circ$ с шагом в 10° (рис. 3). Справедливость полученного решения соответствует наличию зоны охлаждения в области $[2\pi - \beta_1, 0 + \beta_1]$ (рис. 2).

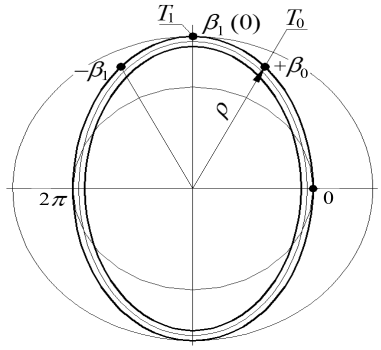

Рис. 2. Условия на поверхности к решению задачи

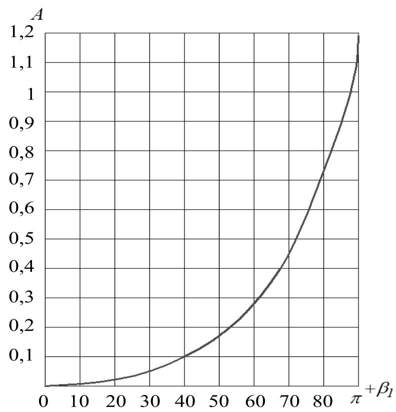

Рис. 3. График изменения единичной функции температурного поля $t_0 = f(A)$ при $0 \le +\beta_1 \le \pi$

Термонапряженное состояние оболочки определяется уровнем температурных напряжений $\sigma_\beta = \pm E\alpha\delta T_1/(2(1-\nu))$. Установлено, что с изменением геометрической формы в сечении оболочки, в плоскости которого осуществляется термонагружение, изменяется уровень экстремальной температуры. Наименьший ее уровень соответствует поперечному сечению, геометрической формой которого является окружность. Чем больше угол наклона плоскости сечения к продольной оси оболочки, тем выше значения максимальной температуры. В случае, когда угол наклона поперечного сечения цилиндрической оболочки составляет $\theta = 90^\circ$, имеем продольное сечение бесконечной цилиндрической оболочки, в котором максимальный радиус кривизны эллипса стремится к бесконечности. Такая модель соответствует тонкой бесконечной пластине, еще раз подтверждая, что прогиб бесконечной пластины при термонагружении не зависит от ее толщины, а определяется ее протяженностью в соответствии с распределением экстремального температурного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурак Я. И.*, *Григолюк Э. И.*, *Подстригач Я. С.* О применении методов вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек. — Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 101–109.