

И. В. Павлов, И. В. Цветкова, В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону, РГСУ, Москва, МУ им. С. Ю. Витте). **Хеджирование одношаговых (B, S) -рынков с бесконечным числом состояний при помощи хааровских интерполяций.**

Рассмотрим одношаговый (B, S) -рынок, заданный на (Ω, \mathcal{F}) , где $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ — одношаговая фильтрация, причем $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, а \mathcal{F}_1 порождена разбиением Ω на счетное число атомов A_i ($i = 1, 2, \dots$). Рассмотрим \mathcal{F} -адаптированный случайный процесс $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, который мы мыслим как дисконтированную стоимость акции. Обозначим $\mathbb{P}(Z, \mathcal{F})$ множество невырожденных мартингалльных мер этого рынка, совпадающее с множеством решений следующей системы (где $Z_0|_{\Omega} = a$, $Z_1|_{A_i} = b_i$):

$$p_1 + p_2 + \dots = 1, \quad b_1 p_1 + b_2 p_2 + \dots = a, \quad p_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Будем предполагать, что $\inf_i b_i < a < \sup_i b_i$. Это условие гарантирует безарбитражность и неполноту исходного финансового

Теорема [1]. Пусть $P \in \mathbb{P}(Z, \mathcal{F})$ и $b_1 < a < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < \dots$, причем $b_i - b_{i-1} \geq b_{i-1}$ для всех $i \geq 2$. Если $b_{i-1} p_{i-1} > \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j p_j$ для всех $i \geq 3$, то мера P удовлетворяет ОСУХЕ [2] — ослабленному свойству универсальной хааровской единственности.

Пусть мера P удовлетворяет ОСУХЕ (например, удовлетворяются условия сформулированной теоремы). Цель данного доклада — показать, как задача хеджирования на исходном неполном рынке сводится к задаче хеджирования на интерполирующем полном безарбитражном рынке с бесконечным горизонтом, если покупатель и продавец платежного обязательства договорились исчислять его цену усреднением платежного обязательства по заданной выше мере P .

Будем рассматривать на (Ω, \mathcal{F}) специальные хааровские фильтрации $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{H}_{\infty} = \mathcal{F}_1$ и у которых каждая σ -алгебра \mathcal{H}_n порождается разбиением Ω ровно на $n + 1$ атом, причем на каждом шагу дробится тот атом, который был получен в результате дробления на предыдущем шаге. Таким образом, каждая такая фильтрация \mathcal{H} интерполирует фильтрацию \mathcal{F} . Если положить $Y_n = \mathbf{E}^P[Z_1 | \mathcal{H}_n]$, то процесс $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ интерполирует цену акции Z и обладает единственной мартингалльной мерой, равной исходной мере P (этот факт обеспечивается удовлетворением меры P ОСУХЕ). Пусть $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{A_i}$ есть ограниченное платежное обязательство. Образует с.в. $X_n = \mathbf{E}^P[f | \mathcal{H}_n]$. Легко видеть, применив индукцию, что процесс $X = (X_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ есть полный капитал некоторого самофинансируемого портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$. Выполнение P -п.н. равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = f$ означает реплицирование платежного обязательства f и полноту интерполирующего рынка Y (что, впрочем, вытекает из общей теоремы 1.17 в [3]).

В докладе будут представлены формулы вычисления хеджирующего портфеля $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ для произвольного ограниченного платежного обязательства f .

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00637а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров. — Вестник РГУПС, 2012, № 3, с. 177–181.
2. *Данежяц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.
3. *Ширяев А. Н., Черный А. С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража. — Тр. МИ РАН, 2002, т. 237, с. 7–11.