ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Ю. Н. Горелов (Самара, ИПУСС РАН). **Об оптимальной координации парциальных процессов управления в составной системе.**

Рассматриваются автономно функционирующие объекты управления

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{A}_k(t)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k(t)\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k(t) + \mathbf{V}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ — векторы переменных состояния, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$ — векторы управляющих параметров, $\mathbf{V}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$ — векторные случайные процессы с заданными статистическими характеристиками, $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ и $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{m_k \times m_k}$ — заданные матрицы. Вектор-функции $\mathbf{w}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$ здесь задаются на интервале управления $[t_0, t_f]$ так, чтобы желаемые текущие состояния (траектории) парциальных объектов управления (1) определялись решениями следующих уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}_k^*}{dt} = \mathbf{A}_k(t)\mathbf{x}_k^* + \mathbf{w}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_k^*(t)$, $k = 1, 2$ — желаемые программы изменения состояний (траекторий) объектов управления на интервале $[t_0, t_f]$, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\mathbf{x}_k^*(t_0) = \mathbf{x}_{k0}^*; \quad \mathbf{x}_k^*(t_f) = \mathbf{x}_{kf}^*, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_{k0}^*$, $\mathbf{x}_{kf}^*$ — заданные векторы. Если $\mathbf{w}_k(t)$ в (1) суть вектор-функции вида $\mathbf{w}_k(t) = \mathbf{B}_k(t)\mathbf{u}_k^*(t)$, то $\mathbf{u}_k^*(t)$ суть программы управления, с помощью которых решаются соответствующие двухточечные граничные задачи (2), (3).

В общем случае при наличии случайных возмущений в (1) возникают отклонения $\mathbf{x}_k(t)$ от $\mathbf{x}_k^*(t)$, а именно: $\Delta\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_k^*(t)$, которые должны парироваться управлениями $\mathbf{u}_k(t)$. Решение таких задач для каждого из объектов управления (1) можно получить с помощью методов АКОР [1]–[3], в которых качество регулирования при наличии какой-либо измерительной информации обычно оценивается условными математическими ожиданиями для функционалов следующего вида:

$$F_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k, t_f) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_k^T(t_f)\mathbf{\Gamma}_k(t_f)\Delta\mathbf{x}_k(t_f)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[\Delta\mathbf{x}_k^T(t)\mathbf{Q}_k(t)\Delta\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{u}_k^T(t)\mathbf{P}_k(t)\mathbf{u}_k(t)\right] dt, \tag{4}$$

где $\mathbf{\Gamma}_k(t_f) = \mathbf{\Gamma}_{kf} > 0$ — заданные положительно определенные матрицы, $\mathbf{Q}_k(t) \geqslant 0$ — некоторые неотрицательно определенные матрицы, $\mathbf{P}_k(t) > 0$ — диагональные матрицы положительных коэффициентов. Матрицы $\mathbf{\Gamma}_{kf}$, $\mathbf{Q}_k$ и $\mathbf{P}_k$ назначаются исходя из требований к терминальной точности, к качеству переходных процессов и к затратам обобщенных энергий управления.

В том случае, когда заданы уравнения измерения текущего состояния для каждого объекта в (1), например, в виде

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}_k(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{N}_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

где $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{p_k}$ — вектор измеряемых параметров, $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}$, а $\mathbf{N}_k(t) \in \mathbb{R}^{p_k}$ — некоторый векторный случайный процесс, то с учетом (5) наилучшей вероятностной оценкой в смысле минимума среднего квадрата ошибки на интервале $[t_0, t_f]$ является условное математическое ожидание функционала (4) [1]:

$$\widehat{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k, t_f) = \mathrm{M}[F_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k, t_f)|\mathbf{y}_k(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t_f]. \tag{6}$$

Следуя подходу, изложенному в [1], решение парциальных задач АКОР (1), (6) получим в следующем виде:

$$\mathbf{u}_k^{opt}(t) = -\mathbf{P}_k^{-1}(t)\mathbf{B}_k^T(t)\mathbf{\Gamma}_k(t)\left[\widehat{\mathbf{x}}_k(t) - \mathbf{x}_k^*(t)\right], \tag{7}$$

где $\widehat{\mathbf{x}}_k(t) = \mathrm{M}[\mathbf{x}_k(t)|\mathbf{y}_k(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t]$ — оценки, получаемые методами теории линейной фильтрации [1], $\mathbf{\Gamma}_k(t)$ — решения уравнений Риккати с граничными условиями $\mathbf{\Gamma}_{kf} > 0$ [1], [2]. Если в (4) ввести еще слагаемое для обобщенной работы сигналов управления [2], то в (7) $\mathbf{\Gamma}_k(t)$ — решения уравнений Ляпунова с тем же граничными условиями, что и для уравнений Риккати [4].

В задаче оптимальной координации текущих состояний для объектов управления (1) их совокупность рассматривается как составная управляемая система, в рамках которой требуется обеспечивать согласование для выходов

$$\mathbf{z}_k(t) = \mathbf{D}_k(t)\mathbf{x}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{8}$$

где $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{l_k}$ — векторы координируемых параметров, $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{l_k \times n_k}$. В случае попарного согласования выходов (8) рассматриваемая задача сводится к необходимости выполнения следующих условий:

$$\mathbf{s}_{kj}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = k+1, \quad k+2, \ldots, N, \tag{9}$$

где $\mathbf{s}_{kj} \in \mathbb{R}^{\mu_{kj}}$, а координирующие связи для (8) вводятся так:

$$\mathbf{s}_{kj}(t) = \mathbf{G}_{kj}(t)\mathbf{z}_j(t) + \mathbf{G}_{jk}(t)\mathbf{z}_k(t). \tag{10}$$

Предполагается, что решения двухточечных граничных задач управления (2), (3) согласованы в том смысле, что с учетом (8), (10) условия (9) выполняются для всех $\mathbf{x}_k^*(t)$ тождественно. Очевидно, что интегральную оценку степени координации с учетом (10) можно определить с помощью функционала

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N} \mathbf{s}_{kj}^T(t)\mathbf{\Omega}_{kj}^2 \mathbf{s}_{kj}\,dt, \tag{11}$$

где $\mathbf{\Omega}_{kj} \in \mathbb{R}^{\mu_{kj} \times \mu_{kj}}$ — некоторые положительно определенные матрицы весов.

С учетом координационных связей (8)–(10) объединение парциальных объектов управления (1) в управляемую составную систему представляет собой прямую сумму для (1), а именно:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U} + \mathbf{W}(t) + \mathbf{V}(t), \tag{12}$$

где $\mathbf{X} = \mathrm{Col}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^n$ $(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_N)$, $\mathbf{U} = \mathrm{Col}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N) \in \mathbb{R}^m$ $(m = m_1 + m_2 + \cdots + m_N)$, $\mathbf{W} = \mathrm{Col}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_N) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{V} = \mathrm{Col}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_N) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} = \mathrm{Diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_N\}$, $\mathbf{B} = \mathrm{Diag}\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_N\}$, а также $\mathbf{X}^* = \mathrm{Col}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_N^*)$ $\Delta\mathbf{X} = \mathrm{Col}(\Delta\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{x}_2, \ldots, \Delta\mathbf{x}_N)$ и $\mathbf{Y} = \mathrm{Col}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N)$.

С учетом (4), (11) оптимальное управление для системы (12), как и для парциальных задач управления (1), (6), будет определяться при минимизации условного математического ожидания функционала

$$F = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, \mathbf{U}, t_f) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{\Gamma}_f\Delta\mathbf{X}(t_f)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\Delta\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\Delta\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt, \tag{13}$$

где $\mathbf{\Gamma}_f = \mathrm{Diag}\{\mathbf{\Gamma}_{1f}, \mathbf{\Gamma}_{2f}, \ldots, \mathbf{\Gamma}_{Nf}\}$, $\mathbf{Q} = \mathrm{Diag}\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_N\}$, $\mathbf{P} = \mathrm{Diag}\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_N\}$, а $\mathbf{R} \geqslant 0$ — матрица координационных связей, получаемая при формировании функционала (11) с учетом (8) и (10).

Следуя [1], решение задачи АКОР для (12) с учетом (13) получим в виде

$$\mathbf{U}_{opt}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\{\mathbf{\Gamma}(t)\left[\widehat{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}^*(t)\right] + \mathbf{g}(t)\}, \tag{14}$$

где $\widehat{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{M}[\mathbf{X}(t)|\mathbf{Y}(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant t]$, $\mathbf{\Gamma}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица, получаемая из решения соответствующего матричного уравнения Риккати [4] с заданным конечным условием $\mathbf{\Gamma}(t_f) = \mathbf{\Gamma}_f > 0$, а $\mathbf{g}(t)$ — вектор-функция, получаемая из решения следующего уравнения:

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} + (\mathbf{A}^T - \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T)\mathbf{g} + \mathbf{R}\mathbf{X}^* = 0, \quad \mathbf{g}(t_f) = 0.$$

Если размерность пространства состояний системы (12) достаточно велика, то вместо (13) удобно использовать функционал обобщенной работы [1]–[3]. В этом случае в (13) дополнительно включается слагаемое

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\mathbf{U}_{opt}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{U}_{opt}(t)dt, \tag{15}$$

где $\mathbf{U}_{opt}(t)$ — оптимальное управление, которое надлежит определить [2]. Минимизируя условное математическое ожидание для суммы (13) и (15), также получим оптимальное управление в виде (14), но с тем отличием, что здесь матрица $\mathbf{\Gamma}(t)$ — решение матричного уравнения Ляпунова [4]:

$$\frac{d\mathbf{\Gamma}}{dt} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{\Gamma}(t_f) = \mathbf{\Gamma}f > 0, \tag{16}$$

а вектор-функция $\mathbf{g}(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} + \mathbf{A}^T\mathbf{g} + \mathbf{R}\mathbf{X}^* = 0, \quad \mathbf{g}(t_f) = 0. \tag{17}$$

Очевидно, что решение уравнения (16) менее трудоемкая процедура в сравнении с решением уравнения Риккати. Более того, если известны переходные матрицы для объектов управления (1) — $\mathbf{\Phi}_k(\tau, t)$ и, стало быть, для составной системы (12), то аналитическое решение уравнения (16) с учетом $\mathbf{\Phi}(\tau, t) = \mathrm{Diag}\{\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \ldots, \mathbf{\Phi}_N\}$ будет иметь вид $(-\infty < t_0 \leqslant t < t_f)$ [4]:

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{\Phi}^T(t_f, t)\mathbf{\Gamma}_f\mathbf{\Phi}(t_f, t) + \int_t^{t_f}\mathbf{\Phi}^T(\tau, t)\left[\mathbf{Q}(\tau) + \mathbf{R}(\tau)\right]\mathbf{\Phi}(\tau, t)d\tau, \tag{18}$$

и, соответственно, решение уравнения (17):

$$\mathbf{g}(t) = \int_t^{t_f}\mathbf{\Phi}^T(\tau, t)\mathbf{R}(\tau)\mathbf{X}^*(\tau)d\tau. \tag{19}$$

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи оптимальной координации получено в виде (14), (18), (19). Очевидно, что расщепление (14) на оптимальные парциальные управления для подсистем (1) с учетом блочного представления матрицы $\mathbf{\Gamma}(t) = [\mathbf{\Gamma}_{kj}(t)]_{k,j=1,2,\ldots,N}$ в (16) или (18) и $\mathbf{g}(t) = \mathrm{Col}[\mathbf{g}_1(t), \mathbf{g}_2(t), \ldots, \mathbf{g}_N(t)]$ в (17) или (19), в отличие от решения задач АКОР для (1), (6), приводит к таким оптимальным управлениям:

$$\mathbf{u}_k^{opt}(t) = -\mathbf{P}_k^{-1}(t)\mathbf{B}_k^T(t)\Big\{\sum_{j=1}^{N}\mathbf{\Gamma}_{kj}(t)\left[\widehat{\mathbf{x}}_j(t) - \mathbf{x}_j^*(t)\right] + \mathbf{g}_k(t)\Big\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \quad (20)$$

где с учетом (18), (19) и $\mathbf{\Gamma}_{kj}(t_f) = 0$ при $k \neq j$:

$$\mathbf{\Gamma}_{kj}(t) = \mathbf{\Phi}_k^T(t_f, t)\mathbf{\Gamma}_{kj}(t_f)\mathbf{\Phi}_j(t_f, t) + \int_t^{t_f} \mathbf{\Phi}_k^T(\tau, t)\mathbf{R}_{kj}^*(\tau)\mathbf{\Phi}_j(\tau, t)d\tau, \qquad k, j = 1, 2, \ldots, N; \quad (21)$$

$$\mathbf{g}_k(t) = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{g}_{kj}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_t^{t_f} \mathbf{\Phi}_k^T(\tau, t)\mathbf{R}_{kj}(\tau)\mathbf{x}_j^*(\tau)d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \quad (22)$$

где $\mathbf{R}_{kj}^*(\tau) = \mathbf{Q}_{kj}(\tau) + \mathbf{R}_{kj}(\tau)$.

Следует отметить, что в постановке задачи об оптимальной координации текущих выходов (8)–(10) для объектов (1), включаемых в состав системы (12), в (13) без ограничения общности можно принять $\mathbf{Q}(t) = 0$. В этом случае решение задач АКОР по достижению желаемых текущих состояний парциальных объектов управления (1), определяемых решениями уравнений (2), обеспечивается только за счет координации их выходов (8) с учетом условий (9), (10). Из полученных выражений (20)–(22) при этом следует, что оптимальные управления (20) будут содержать перекрестные связи, обусловленные необходимостью выполнения условий координации. Влияние последних можно оценить: во-первых, сравнением значений суммы условных математических ожиданий для (4) и условного математического ожидания для (13), получаемых при одинаковых условиях; во-вторых, сравнением расходов управления для объектов управления (1) при наличии и при отсутствии координационных связей. В связи с этим не только в теоретическом, но и в практическом отношении представляет интерес задача по определению затрат ресурсов управления, необходимых для выполнения условий координации объектов управления, включаемых в составную систему, и влияния на эти затраты различных видов координации. С этим связаны возможные направления обобщения в постановке рассмотренной задачи и одно наиболее очевидное из них связано с иными вариантами задания условий координации (9), (10). Действительно, условия (9), по существу, означают тотальное согласование текущих состояний («всех со всем») для объектов управления (1), а число координационных связей при этом будет равно $C_N^2 = \frac{N!}{2(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$. Очевидно, что в общем случае такое согласование является предельно избыточным. С учетом предположения о согласованности условий (9) для выходов (8) подсистем (2), по существу, такое согласование при $\mathbf{Q}(t) = 0$ в (13) и даже при $\mu^* \leqslant n$, где $\mu^* = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=k+1}^{N}\mu_{kj}$, будет приводить к решениям, которые будут близки к получаемым при отсутствии условий (9). Кроме того, реализация оптимального управления (14) с учетом (18), (19) может потребовать обмена между объектами управления (1) большими объемами информации.

В связи с этим одной из практически важных является задача синтеза множества координационных связей (9), с помощью которых образуется составная система (12). Критерием оптимальности при этом могут быть, например, как оценки расходов управления, так и, соответственно, качество управления составной системой с введением какой-либо дополнительной целевой функции для некоторой общей (глобальной) задачи управления [5], [6], которая может быть связана с организацией расходования имеющихся ресурсов управления для достижения заданной цели функционирования составной системы. Не останавливаясь в связи с этим на рассмотрении всего возможного множества вариантов задания условий (9), отметим лишь один частный случай, когда согласование выходов (8) сводится к выполнению только следующих условий:

$$\mathbf{s}_{1j}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \qquad j = 2, 3, \ldots, N, \tag{23}$$

для которых координирующие связи (10) задаются в виде

$$\mathbf{s}_{1j}(t) = \mathbf{G}_{1j}(t)\mathbf{z}_j(t) + \mathbf{G}_{j1}(t)\mathbf{z}_1(t). \tag{24}$$

Очевидно, что в этом случае структура оптимального управления (20)–(22) сохраняется, хотя с учетом (23), (24) парциальный объект управления (1) с индексом $k = 1$ в системе (12) выделяется как „ведущий“, поскольку теперь, вообще говоря, требуется согласование парциальных выходов остальных парциальных объектов управления (1) только с выходом «ведущего» объекта управления в (12). В содержательном отношении для достижения цели функционирования составной системы это будет связано с организацией обмена информацией о текущем состоянии для ее парциальных объектов управления (1) и с реализацией соответствующих компонент оптимального управления (20)–(22), которые могут быть разделены соответствующим образом на локальные и глобальные управления. Таким образом, с необходимостью должна быть введена некоторая иерархическая организация для координации парциальных процессов управления (1) в составной системе (12). В рассмотренном случае это будет отвечать двухступенчатой веерной структуре иерархической организации [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-08-97019 р_поволжье_а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков И. Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М.: Наука, 1975. 432 с.
2. *Красовский А. А.*, *Буков В. Н.*, *Шендрик В. С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977, 272 с.
3. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973, 558 с.
4. *Параев Ю. И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1989, 168 с.
5. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981, 488 с.
6. *Месарович М.*, *Мако Д.*, *Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973, 344 с.