ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш (Казань, ИЭУиП, Дебреценский ун-т). **Представление хвоста пуассоновского распределения и его применения.**

Обозначим: π_λ — пуассоновская случайная величина с параметром λ, Φ — функция распределения стандартной гауссовской случайной величины.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$. *Тогда для некоторого* $\frac{12n}{12n+1} < \theta < 1$ *имеем*

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} = e^{-\frac{\theta}{12n}} \int_{\sqrt{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^u \frac{t^2}{1-\frac{t}{\sqrt{n}}} dt\right) d\Phi(u). \tag{1}$$

Обозначим $x_\lambda = x_{n,\lambda} = \sqrt{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$. Интегрируя по частям правую часть (1), получаем

Теорема 2. *Пусть* $\lambda > 0$, $n \in \mathbf{N}$ *такое, что* $0 < \frac{\lambda}{n} < 1$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\{\pi_\lambda > n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}} e^{n-\lambda} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n (1 - o(1)),$$

где $0 < o(1) < \frac{1}{12n} + \frac{1}{1+(x_\lambda)^2}$.

Пусть ξ_i, $i \in \mathbf{N}$, — независимые, невырожденные, неотрицательные целочисленные случайные величины. Обобщенной схемой размещения n частиц по N ячейкам называются случайные величины $\eta_1', \ldots, \eta_N'$, совместное распределение которых может быть представлено в виде

$$\mathbf{P}\{\eta_1' = k_1, \ldots, \eta_N' = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \,\Big|\, \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\}.$$

Обобщенная схнма размещения была введена В. Ф. Колчиным в [1]. Мы будем рассматривать случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$, совместное распределение которых может быть представлено в виде

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \,\Big|\, n' < \sum_{i=1}^N \xi_i \leqslant n''\right\},$$

где $n' < n''$, $n', n'' \in \mathbf{N}$. При этом предполагается, что $\mathbf{P}\left\{n' < \sum_{i=1}^N \xi_i \leqslant n''\right\} > 0$. Таким образом случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ являются обобщенной схемой размещения частиц по ячейкам о которой известно, что количество частиц в ней больше n' но не больше n". Тогда событие $\{\eta_i = r\}$ состоит в том, что i-я ячейка содержит r частиц и количество ячеек, содержащих r частиц, $r = 0, 1, 2, \ldots$, есть случайная

$$\mu_{n'n''N} = \mu_{n'n''N}^{(r)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta_i = r\}}.$$

Обозначим: $\alpha_{nN} = \frac{n}{N}$. Применяя теорему 1 м теорему 2, получаем

Теорема 3. *Пусть* $\xi_i, \ \ i \in \mathbf{N},$ *— независимые пуассоновские случайные величины с параметром* λ . *Предположим, что* $\lim_{n', N\to\infty} \alpha_{n'N} = \alpha',\ \ \lim_{n'', N\to\infty} \alpha_{n''N} = \alpha''$.

1) *Пусть* $\alpha' \leqslant \lambda < \alpha''$. *Тогда*

$$\lim_{n', n'', N\to\infty} \frac{1}{N}\mu_{n'n''N} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \quad \text{почти наверное.}$$

2) *Пусть* $\lambda < \alpha' < \alpha''$. *Тогда*

$$\lim_{n', n'', N\to\infty} \frac{1}{N}\mu_{n'n''N} = e^{-\alpha'}\frac{(\alpha')^r}{r!} \quad \text{по вероятности.}$$

3) *Пусть* $\alpha' \leqslant \alpha'' < \lambda$. *Тогда*

$$\lim_{n', n'', N\to\infty} \frac{1}{N}\mu_{n'n''N} = e^{-\alpha''}\frac{(\alpha'')^r}{r!} \quad \text{по вероятности.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Один класс предельных теорем для условных распределений. — Лит. матем. сб., 1968, т. 8, № 1, с. 53–63.