

**А. П. Ковалевский** (Новосибирск, НГТУ/НГУ). **Сравнение статистических критериев разладки модели с циклическим трендом.**

Рассматривается модель с конечным числом взаимно ортогональных гармоник и аддитивным случайным шумом в дискретном времени. Эта модель известна в литературе как модель линейной регрессии с циклическим трендом. Изучение статистических критериев обнаружения разладки в этой модели предпринято в связи с исследованием колебаний строительных конструкций: ставится задача определения изменений прочностных характеристик конструкции по исследованию ее колебаний. Через  $n$  обозначим количество наблюдений. Будем считать, моменты наблюдения равно отстоящими друг от друга, и что период наблюдений состоит из целого числа периодов колебаний. Таким образом, приходим к модели

$$Y_i = a_0 + \sum_{m \in M} \left( a_m \cos \frac{2\pi m i}{n} + b_m \sin \frac{2\pi m i}{n} \right) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Через  $M$  обозначено некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел. Относительно ошибок наблюдений делаются следующие стохастические предположения: случайные величины  $\varepsilon_i$  независимы и одинаково распределены с нулевым математическим ожиданием и ненулевой дисперсией  $\sigma^2$ . Задача состоит в том, чтобы построить класс статистических критериев, различающих основную гипотезу, определенную моделью (1), и альтернативную гипотезу, состоящую в том, что в некоторый момент времени значение  $a_0$  в модели (1) заменяется на некоторое отличное от него значение  $b_0$ . При альтернативной гипотезе предполагается, что это изменение происходит только один раз за весь период наблюдений. После построения статистических критериев необходимо их сравнить и выбрать более мощный.

Для построения критериев рассмотрим регрессионные остатки  $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ , где  $\hat{Y}_i$  получены из формулы (1) отбрасыванием регрессионных ошибок  $\varepsilon_i$  и заменой параметров на их оценки по методу наименьших квадратов. Введем эмпирический мост  $\tilde{Z}_n$  — случайную ломаную, построенную по точкам  $\left( \frac{k}{n}, \frac{\Delta_k}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} \right)$ , где  $\Delta_k = \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_i$  — частичная сумма остатков регрессии,  $\tilde{\sigma} = \left( \tilde{\varepsilon}^2 \right)^{1/2}$  — их выборочное среднеквадратическое отклонение. Вычисление эмпирического моста не требует знания каких-либо характеристик модели (1). На основании [1] доказана следующая теорема.

**Теорема.** *В сделанных предположениях эмпирический мост сходится слабо в равномерной метрике к центрированному гауссовскому процессу с ковариационной функцией*

$$K_f(s, t) = \min(s, t) - st - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m \in M} \frac{1}{m^2} \sin \pi m s \sin \pi m t \cos \pi m (s - t).$$

На основании этой теоремы построены статистические критерии обнаружения разладки модели с циклическим трендом. Для построения критерия  $J_d$  вычисляется корреляционная матрица значений предельного гауссовского процесса в точках  $\frac{1}{d+1}, \dots, \frac{d}{d+1}$ . Затем теоретические значения в этих точках ортогонализуются, нормируются, возводятся в квадрат и складываются. В результате получаем распределение хи-квадрат с  $d$  степенями свободы. Это распределение является предельным для статистики от эмпирического моста, построенной с использованием тех же преобразований. Более детально описаны критерии  $J_1, J_2, J_3$ . Наряду с ними рассматривается критерий, основанный на максимальном отклонении эмпирического моста от оси абсцисс. Этот критерий требует корректировки по результатам моделирования, так как для него известна только грубая асимптотика предельного распределения. Сравнение критериев проводится на численном примере и показывает преимущество критерия, основанного на максимальном отклонении эмпирического моста в случае, когда альтернатива состоит в однократном изменении математического ожидания в случайный момент времени, равномерно распределенный на интервале наблюдения. Однако критерии, основанные на измерениях в нескольких точках, приближаются к нему по мощности с ростом числа точек.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00661), Программы стратегического развития НГТУ (проект 2.1.1-2013).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *MacNeill I. B.* Limit processes for sequences of partial sums of regression residuals. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 4, p. 695–698.