ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2013

Р. Э. Шангин (Челябинск, НИУ ЮУрГУ). **Точный алгоритм для решения одной дискретной задачи размещения взаимосвязанных объектов.**

В работе рассматривается дискретная задача Вебера [1], когда размещаемый граф имеет вид простого цикла. Приведем математическую формулировку задачи.

Пусть $G = (J, E)$ — простой цикл, где J — множество вершин графа (размещаемые объекты), E — множество ребер графа G (связи между размещаемыми объектами). Пусть V — конечное множество позиций (точек), предназначенных для размещения вершин графа G. Размещением вершин графа G назовем однозначное отображение $\pi : J \to V$, т. е. вершина $i \in J$ размещается в позицию $\vartheta_i \in V$.

Обозначим $p(i, \vartheta_i)$ — функция стоимости размещения вершины $i \in J$ в позиции $\vartheta_i \in V$, и $c([i,j], \vartheta_i, \vartheta_j)$ — функция стоимости размещения ребра $[i,j] \in E$ на V^2, при размещении его концевых вершин $i, j \in J$ в позициях $\vartheta_i, \vartheta_j \in V$ соответственно.

Требуется разместить вершины графа G в позициях V таким образом, чтобы суммарная стоимость размещения вершин и ребер графа G была минимальной:

$$F(\pi) = \sum_{[i,j]\in E} c([i,j], \pi(i), \pi(j)) + \sum_{i\in J} p(i, \pi(i)) \to \min_{\pi}. \qquad (1)$$

Несмотря на множество известных полиномиальных алгоритмов для частных случаев дискретной задачи Вебера, и звестно, что в общем случае она NP-трудна [2].

Обозначим тройкой (G, V, F) рассматриваемую дискретную задачу Вебера (1). Предлагается полиномиальный алгоритм CyWPA, основанный на динамическом программировании (ДП), находящий оптимальное решение задачи (G, V, F).

Для удобства описания алгоритма введем следующие обозначения. Пусть $s \in J$ — произвольная вершина цикла G и $T = (I, W)$ — подграф графа G, индуцированный множеством вершин $J \setminus \{s\}$. Положим, что $G(\vartheta_s) : \vartheta_s \in V$ — есть граф G, в котором вершина s размещена в позицию ϑ_s. Исходную задачу (G, V, F) разобьем на ряд подзадач $(G(\vartheta_s), V, F)$ для любых $\vartheta_s \in V$. Решение каждой подзадачи $(G(\vartheta_s), V, F)$, в свою очередь, разбивается на $N+1$ шагов процесса ДП.

Алгоритм CyWPA

Этап 0. Определить подграф $T = (I, W)$ и на множестве его вершин задать отношение порядка, где корень дерева T — висячая вершина.

Этап 1. Для каждого $\vartheta_s \in V$ решить подзадачу $(G(\vartheta_s), V, F)$:

Шаг 1 процесса ДП. Для каждого $\vartheta_1 \in V$ вычислить значение функции Беллмана $f_1(\vartheta_1)$ и определить множество размещения $V(\vartheta_1)$ по формулам

$$f_1(\vartheta_1) = p(1, \vartheta_1) + c([1, s], \vartheta_1, \vartheta_s) + p(s, \vartheta_s); \quad V(\vartheta_1) = \{\vartheta_1\} \cup \{\vartheta_s\}.$$

Шаг $i : i = 2, 3, \ldots, N$ процесса ДП. Для каждого $\vartheta_i \in V$ и любого $\vartheta_{i-1} \in V$ вычислить значение функции стоимости $R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})$:

$$R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1}) = p(i, \vartheta_i) + c([i, i-1], \vartheta_i, \vartheta_{i-1}) + f_{i-1}(\vartheta_{i-1}).$$

Если $i = N$, то значение функции $R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})$ вычислить по формуле:

$$R(\vartheta_{i_N}, \vartheta_{i_N-1}) = p(i_N, \vartheta_{i_N}) + c([i_N, i_N-1], \vartheta_{i_N}, \vartheta_{i_N-1}) + f_{N-1}(\vartheta_{i_N-1}) + c([i_N, s], \vartheta_{i_N}, \vartheta_s).$$

Для каждого $\vartheta_i \in V$ вычислить значение функции Беллмана $f_i(\vartheta_i)$ и определить множество размещения $V(\vartheta_i)$ по формулам:

$$f_i(\vartheta_i) = \min_{\vartheta_{i-1} \in V} \{R(\vartheta_i, \vartheta_{i-1})\}; \quad V(\vartheta_i) = \{\vartheta_i\} \cup V(\vartheta^*_{i-1}) : R(\vartheta_i, \vartheta^*_{i-1}) = f_i(\vartheta_i). \qquad (2)$$

Шаг $N+1$ *процесса ДП.* Определить оптимальное размещение $\pi_{G(\vartheta_s)}$ вершин графа $G(\vartheta_s)$ и стоимость $F_{G(\vartheta_s)}$ такого оптимального размещения по формулам

$$\pi_{G(\vartheta_s)} = V(\vartheta^*_{i_N}) : \vartheta^*_{i_N} = \arg \min_{\vartheta_{i_N} \in V} \{f_N(\vartheta_{i_N})\}; \quad F_{G(\vartheta_s)} = \min_{\vartheta_{i_N} \in V} \{f_N(\vartheta_{i_N})\}.$$

Этап 2. После того, как оптимальное решение подзадач $(G(\vartheta_s), V, F)$ для каждого $\vartheta_s \in V$ найдено, определить оптимальное решение π^*_G исходной задачи (G, V, F):

$$\pi^*_G = \pi_{G(\vartheta^*_s)} : \vartheta^*_s = \arg \min_{\vartheta_s \in V} \{F_{G(\vartheta_s)}\}.$$

Стоп.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Предложенный алгоритм находит точное решение дискретной задачи Вебера* (G, V, F)*, где* G *— простой цикл.*

Теорема 2. *Вычислительная сложность алгоритма не превосходит* $O(|V|^3 \cdot |J|)$ *операций. Пространственная сложность алгоритма равна* $O(|V|^2)$ *памяти.*

Алгоритм был реализован на ЭВМ в среде MatLab. Проведен вычислительный эксперимент по анализу эффективности предложенного алгоритма в сравнении с пакетом IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.2.

Экспериментально установлено, среднее время решения дискретной задачи Вебера размерности $|J| = 100$, $|V| = 100$ для простого цикла и конечного множества позиций размещения с помощью предложенного алгоритма CyWPA не превысило четырехсот секунд, в то время, как с помощью пакета IBM ILOG CPLEX 12.2 не удалось получить решение для задачи размерности $|J| = 40$, $|V| = 40$ и выше за приемлемое время (1000 сек.). Следует отметить, что среднее время решения задачи Вебера размерности $|J| = 5$, $|V| = 5$ и ниже с помощью предложенного алгоритма значительно превзошло среднее время работы пакета IBM ILOG CPLEX.

Исходя из результатов проведенного вычислительного эксперимента следует, что применение предложенного алгоритма перспективно для решения дискретной задачи Вебера для простого цикла средней и большой размерности.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0395.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Panyukov A. V.*, *Pelzwerger B. V.* Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree Network. — J. Computational and Applied Math., 1991, v. 35, p. 291–296.
2. *Панюков А. В.* Модели и методы решения задач построения и идентификации геометрического размещения. — Дисс. на соискание уч. ст. д-ра физ.-матем. наук: 05.13.16, 1999, 260 с.