ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2013

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИАН). **О многотипном докритическом процессе Гальтона–Ватсона в случайной среде.**

Рассматривается процесс Гальтона–Ватсона $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n),\ldots,Z_p(n))$, $n = 0,1,\ldots,$ с p типами частиц в случайной среде $\zeta=\{\zeta_n, n=0,1,\ldots\}$, которая задается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\zeta_n, n = 0,1,\ldots\}$, принимающих значения из подмножества Θ множества действительных чисел. Каждому значению $\theta\in\Theta$ поставлен в соответствие p-мерный вектор $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\theta)}(\mathbf{s}),\ldots,f_p^{(\theta)}(\mathbf{s}))$, $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_p)$, $0\leqslant s_i\leqslant 1$, $i=1,\ldots,p,$ многомерных вероятностных производящих функций $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$, $i=1,\ldots,p$.

Процесс $\mathbf{Z}(n)$, $n=0,1,\ldots,$ в случайной среде ζ описывает эволюцию популяции частиц $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n),\ldots,Z_p(n))$, где $Z_i(n), i=1,\ldots,p,$ — число частиц типа i в n-ом поколении. А именно, предполагается, что если $\zeta_n=\theta$, $\theta\in\Theta$, то каждая из $Z_i(n)$ частиц типа i, $i=1,\ldots,p$, из n-го поколения размножается согласно многомерной производящей функции $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$ независимо от всех других частиц.

Пусть $M^{(\theta)} = (M^{(\theta)}(i,j))_{i,j}^p$ — матрица средних значений, соответствующая $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s})$. Предполагается, что $M^{(\theta)}(i,j)>0$ для всех $\theta\in\Theta$, $i,j=1,\ldots,p$. Обозначим $\mathbf{v}(M^{(\theta)}) = (v_1(M^{(\theta)}),\ldots,v_p(M^{(\theta)}))$ левый положительный собственный вектор матрицы $M^{(\theta)}$, соответствующий ее перронову корню, причем $|\mathbf{v}(M^{(\theta)})| := \sum_{i=1}^p v_i(M^{(\theta)}) = 1$. Пусть ϱ_n — перронов корень матрицы $M^{(\zeta_n)}$, $\mathbf{e}_i$ — p-мерный вектор, i-я компонента которого равняется 1, а остальные — 0. Предполагается, что распределение случайной величины $\ln\rho_0$ нерешетчато.

В случае, когда для всех θ первые моменты распределений, соответствующих компонентам вектора $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s})$, ограничены снизу положительной константой, а вторые моменты ограничены сверху, имеет место следующее утверждение.

Теорема *Пусть* $\mathbf{E}\ln\varrho_0 < 0$, $0<\mathbf{E}(\rho_0\ln\rho_0)<\infty$, $\mathbf{v}(M^{(\theta)})\equiv\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_p)$ *для всех* $\theta\in\Theta$. *Тогда для любого* $i=1,\ldots,p$ *при* $n\to\infty$

$$\mathbf{P}(|\mathbf{Z}(n)|>0 \mid \mathbf{Z}(0)=\mathbf{e}_i) \sim c_i n^{-3/2} a^n,$$

где $a=\min_{t\in[0,1]}\mathbf{E}\rho_0^t, c_i>0.$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №11-01-00139).