ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

Г. И. Белявский, Н. В. Данилова (Ростов-на Дону, ЮФУ).
Квантильное хеджирование на мультиномиальном рынке.

На мультиномиальном рынке дисконтированный процесс цен определяется уравнениями $S_n = S_{n-1}(1+\rho_n)$, $\rho_n \in \Gamma$, где $\Gamma = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Мультиномиальный рынок рассматривается на полном вероятностном пространстве с естественной фильтрацией. Капитал самофинансируемого портфеля $X_N = X_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta S_i$, где γ — предсказуемая последовательность. Пусть задано финансовое обязательство и требуется выбрать портфель таким образом, чтобы $X_N \geqslant f$ п. н., где f — неотрицательная ограниченная случайная величина. Так как мультиномиальный рынок не является полным, не всякое финансовое обязательство воспроизводимо. В связи с этим можно говорить о верхней цене хеджирования $V = \sup_{P^* \in U} E^{P^*} f$, причем супремум ищется по всем мартингальным мерам. Поскольку существует такой портфель, что $X_N = V + \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta S_i \geqslant f$, цена V обеспечивает безрисковое поведение на рынке. Если цена V слишком высока и есть готовность рисковать, то можно применить другие виды хеджирования. Мы можем заменить платежное обязательство и строить портфель таким образом, чтобы $X_N = C + \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta S_i \geqslant \widetilde{f}$, причем $\widetilde{f} \leqslant f$ и, как следствие, $C < V$.

В мультиномиальной модели Ω — конечное множество. В связи с этим положим $\widetilde{f}(\omega_i) = x_i f(\omega_i)$, где $x_i \in [0,1]$. Пусть Q — естественная мера, определяемая рынком. Рассмотрим естественную меру близости f и $\widetilde{f}$: $E^Q(f - \widetilde{f}) = \sum_i Q_i(f(\omega_i) - \widetilde{f}(\omega_i)) = \sum_i Q_i f(\omega_i) - \sum_i Q_i f(\omega_i) x_i$. В результате возникает оптимизационная задача

$$\sum_i Q_i f(\omega_i) x_i \to \max_x, \quad \sup_{P^* \in U} \sum_i P_i^* f(\omega_i) x_i \leqslant C, \quad x_i \in [0,1]. \tag{1}$$

Множество U мартингальных мер на конечном вероятностном пространстве является выпуклым многогранником, и любая мартингальная мера выражается в виде выпуклой комбинации экстремальных мер: $P^* = \sum_j y_j R^j$. Отсюда задача (1) трансформируется в задачу

$$\sum_i Q_i f(\omega_i) x_i \to \max_x, \quad \sum_i R_i^j f(\omega_i) x_i \leqslant C \text{ для всех } j, \quad x_i \in [0,1]. \tag{2}$$

В обозначениях $L_i = Q_i f(\omega_i)$, $M_i^j = R_i^j f(\omega_i)$ задача (2) принимает вид

$$\sum_i L_i x_i \to \max_x, \quad \sum_i M_i^j x_i \leqslant C \text{ для всех } j, \quad x_i \in [0,1]. \tag{3}$$

Поскольку целевая функция ограничена сверху и множество допустимых решений непусто, задача (3) имеет решение, поэтому и двойственная задача

$$\min_{\lambda \geqslant 0} F(\lambda) = \min_{\lambda \geqslant 0} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left[\left(L - \sum_j \lambda_j M^j, x \right) + C \sum_j \lambda_j \right] \tag{4}$$

также имеет решение. Анализ задачи (4) позволяет определить структуру решения внутренней задачи:

$$x_i(\lambda) = \begin{cases} 1, & t_i > 0, \\ 0, & t_i < 0, \quad \text{где } t_i = L_i - \sum_j \lambda_j M_i^j, \\ \text{любое число из } [0,1], & t_i = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $F(\lambda)$ — выпуклая недифференцируемая функция, и ее минимум можно найти обобщенным градиентным спуском. Сложность рассматриваемой задачи существенным образом зависит от множества экстремальных мер. Рассмотрим множество экстремальных мер для мультиномиальной модели. Прежде всего, отметим, что $\Omega = \Omega(\rho) \times \Omega(\rho) \times \cdots \times \Omega(\rho)$, где $\Omega(\rho) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Любая мартингальная мера является продакт-мерой: $P = P^{(1)} \times \cdots \times P^{(N)}$. Отсюда мартингальные меры получаются из неотрицательных решений системы линейных уравнений:

$$\sum_i a_i y_i^j = 0 \text{ для всех } j, \quad \sum_i y_i^j = 1. \tag{5}$$

Допустимые базисные решения (5) имеют следующую структуру:

$$y_i(r_j, s_j) = \begin{cases} 0, & i \neq r_j, \ i \neq s_j, \\ \dfrac{a_{s_j}}{a_{s_j} - a_{r_j}}, & i = r_j, \\ \dfrac{-a_{r_j}}{a_{s_j} - a_{r_j}}, & i = s_j, \end{cases}$$

для всех r_j и s_j, удовлетворяющих условию $a_{r_j} < 0 < a_{s_j}$. В связи с этим множество экстремальных мер $U^e = \{P: \ P^{(j)}(a_i) = y_i(r_j, s_j)\}$.

В докладе излагается алгоритм решения задачи и приводится ряд примеров. Отметим, что предлагаемая постановка задачи и метод ее решения, использующий экстремальные мартингальные меры, имеет преимущество на конечном вероятностном пространстве над методами, использующими лемму Неймана–Пирсона и различные ее модификации (см., например, [1, 2]). Заметим также, что переход от прямой задачи линейного программирования к двойственной задаче выгоден при любом k, если число отрицательных элементов m множества Γ равно единице. Если $m > 1$, то переход выгоден при $k \leqslant m^2/(m-1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rudloff B.* A generalized Neyman-Pearson lemma for hedge problems in incomplete markets. — In: Workshop «Stochastische Analysis» (27.09.2004-29.09.2004), p. 241–249.
2. *Follmer H.*, *Leukert P.* Quantile Hedging. — Finance and Stochastics, 1999, v. 3, № 3, p. 251–273.