ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2013

В. П. Микка, К. В. Микка, А. В. Пехтерева (Йошкар-Ола, МОСИ). **Об аналогах выпуклых функций, принадлежащих семейству Беккера B_1 .**

Геометрические свойства семейства Беккера

$$B_1 = \left\{ f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + \ldots : \quad \left|\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leq \frac{1}{1-|\zeta|^2} \right\}$$

можно выяснить, решая задачу о вложении более простых с геометрической точки зрения классов, таких как выпуклых, звездообразных и других.

В данном сообщении этот вопрос решается посредством p-симметричных невыпуклых ограничений на функционал $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$, причем рассматриваются подчинение вида

$$S_{n;\widetilde{\Phi}_p^0(\zeta)} = \left\{ f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots : \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \frac{\zeta}{(1-\zeta^p)^{1/p}} = \widetilde{\Phi}_p^0(\zeta) \right\}.$$

Теорема 1. *Имеют место вложения*

$$S_{n;\widetilde{\Phi}_p^0(\zeta)} \subset B_1,$$

если $p \geq 2$ *и* $n \geq 1$ *или при* $p = 1$ *и* $n \geq 4$.

Семейства $S_{n;\widetilde{\Phi}_1^0(\zeta)} \not\subset B_1$ *при* $n = 1, 2, 3$.

Таким образом, при $p = 1$ и $n = 1, 2, 3$ можно рассматривать задачу о нахождении радиуса принадлежности $r_{S_{n;\widetilde{\Phi}_1^0(\zeta)}}[B_1]$.

Теорема 2. *Радиусы принадлежности*

$$r_{S_{n;\widetilde{\Phi}_1^0(\zeta)}}[B_1] = \sqrt[n]{\frac{n+2}{6}} \cdot \sqrt{\frac{2(n+2)}{3n}}, \quad n = 1, 2, 3$$

являются неулучшаемыми из-за экстремальных функций

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\tau}{(1-\tau^n)^{2/n}}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Из этих утверждений следует, что можно выделить подклассы $S_{n;\widetilde{\Phi}_1^0(\zeta)}$, которые принадлежат B_1 .

Теорема 3. *Пусть*

$$S_{n;\alpha,\beta}^0 = \left\{ f(\zeta) = \zeta + a_{n+1}\zeta^{n+1} + \ldots : \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \frac{(\alpha+\beta)\zeta}{1-\alpha\zeta} \right\},$$

где $\alpha \in [-1, 1]$ *и* $\alpha + \beta > 0$.

Если $\alpha + i\beta \in \nabla^0_{1;n;\alpha,\beta}$ *с границей, состоящих из кривых с уравнениями*

$$\sqrt[n]{n+2}\sqrt{(n+2)(\alpha+\beta)} - \sqrt[n]{2(2\alpha+\beta)}\sqrt{n(2\alpha+\beta)} = 0, \quad \alpha \in [0,1], \quad n = 1,2,3,4;$$

$$\sqrt[n]{n+2}\sqrt{(n+2)(\alpha+\beta)} - \sqrt[n]{2\beta}\sqrt{n\beta} = 0, \quad \alpha \in [-1,0), \quad n = 1,2,3,4,$$

то $S^0_{n;\alpha,\beta} \subset B_1$ *. Эти множества нельзя расширить из-за экстремальных функций*

$$f(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{d\tau}{(1-\alpha\tau^n)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha n}}}, \quad \alpha > 0.$$