ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 20 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2013

О. В. Висков, $\boxed{\text{Ю. В. Прохоров}}$, **В. И. Хохлов** (Москва, МИ РАН). **Характеризационное тождество для распределения Паскаля.**

При изучении возможности применения разработанного в [1], [2] подхода к получению общего решения задачи линеаризации произведений для многочленов, ортогональных относительно распределения Паскаля (отрицательного биномиального распределения)

$$\mathbf{P}\,\{\mathit{\Pi}_{r,p}=\nu\}=C^{\nu}_{r+\nu-1}\,p^r q^{\nu}, \quad \text{где} \quad \nu\in\mathbf{N},\ 1-q=p>0. \tag{1}$$

авторами найдено характеризационное тождество для этого распределения.

Это тождество является аналогом характеризационных тождеств Стейна [4] для нормального, Чена [5] для пуассоновского и авторов [6] для биномиального распределений.

Утверждение. *Случайная величина* $\mathit{\Pi}$ *имеет отрицательное биномиальное распределение* (*распределение Паскаля*) (1) *тогда и только тогда*, *когда*

$$\mathbf{M}\,\mathit{\Pi}\,g(\mathit{\Pi})=\mathbf{M}\,\widetilde{W}\,g(\mathit{\Pi}), \quad \textit{где} \quad \widetilde{W}=r\,\frac{q}{p}\,\frac{1+\Delta}{1-(q/p)\,\Delta}, \tag{2}$$

для любой дифференцируемой функции $g(x)$, $x\in\mathbf{R}$, *с которой* $\mathbf{M}\,|\widetilde{W}\,g(\mathit{\Pi}_{n,p})|<\infty$; *здесь* $\Delta\,g(x)=g(x+1)-g(x)$ *есть оператор взятия разности.*

Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательство характеризационного тождества для биномиального распределения в [6]. Предположим, что тождество (2) справедливо в указанных условиях, и возьмем в качестве функции $g(x)$ функцию $g(x)=e^{\lambda x}$. С ней в левой части (2) возникает производная $\varphi'(\lambda)$ по λ экспоненциальной производящей функции

$$\varphi(\lambda)=\mathbf{M}\,e^{\lambda\,\mathit{\Pi}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\nu}\,\mathit{\Pi}^{\nu}}{\nu!}\mathbf{P}\,\{\mathit{\Pi}=\nu\}$$

моментов распределения случайной величины $\mathit{\Pi}$. Для правой части получаем

$$\mathbf{M}\,\widetilde{W}\,e^{\lambda\,\mathit{\Pi}}=r\,\frac{qu}{p}\,\frac{e^{\lambda}\,\mathbf{M}\,e^{\lambda\,\mathit{\Pi}}}{1-(q/p)(e^{\lambda}-1)}=r\,\frac{qu}{p}\,\frac{e^{\lambda}\,\varphi(\lambda)}{1-(q/p)(e^{\lambda}-1)}=-r\,\frac{q\,e^{\lambda}}{q\,e^{\lambda}-1}\,\varphi(\lambda)$$

(использовано свойство оператора D дифференцирования $f(D)\,[e^{\lambda x}]=f(\lambda)\,e^{\lambda x}$, справедливое для любого многочлена $f(x)$ произвольной степени, а также то обстоятельство, что операторы взятия разности и дифференцирования связаны соотношением $\Delta=e^{D}-1$). Получилось дифференциальное уравнение

$$\varphi'(\lambda)=-r\,\frac{q\,e^{\lambda}}{q\,e^{\lambda}-1}\,\varphi(\lambda),$$

имеющее с учетом начального условия $\varphi(0)=\mathbf{M}\,e^{0}=1$ своим решением функцию $\varphi(\lambda)=p^r(1-q\,e^{\lambda})^{-r}$, являющуюся производящей функцией моментов отрицательного биномиального распределения (1).

Для проведения доказательства в обратную сторону достаточно заметить, что для любого факториального момента случайной величины $\varPi_{r,p}$ тождество (2) справедливо, а, стало быть, оно справедливо и для любых многочленов.

З а м е ч а н и е. Тождеству (2) можно придать и другую форму: случайная величина $\varPi$ имеет распределение (1) тогда и только тогда, когда для любого многочлена $g(x)$ выполняется тождество $\mathbf{M}\,(\varPi - \mathbf{M}\,\varPi)\,g(\varPi) = \mathbf{M}\,\varPi\,\mathbf{M}\,W g(\varPi)$, где $W = \Delta/(p - q\Delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохоров Ю.В.*, *Висков О.В.*, *Хохлов В.И.* Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 18, в. 6, с. 833–838.
2. *Хохлов В. И.*, *Прохоров Ю. В.*, *Висков О. В.* Применение обобщенного тождества Чена к задаче линеаризации для произведений многочленов Пуассона–Шарлье. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 3, с. 472–473.
3. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно полиномиального распределения, и факториально-степенной формализм. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 3, с. 585–592.
4. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
5. *Chen L. H. Y.* Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 534–545.
6. *Висков О.В.*, *Прохоров Ю.В.*, *Хохлов В.И.* Характеризационное тождество для биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137.