ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Т. А. Шорникова, Е. Ю. Калашникова (Пенза, ПГТУ). **Динамические модели макросистем.**

Теоретическим основанием динамических моделей макросистем является сочетание принципов разделения движений и локальных равновесий. Идея такого сочетания достаточно прозрачна. В макросистеме содержится большое количество элементов, стохастическое состояние которых осредняется и преобразуется в детерминированное состояние макроуровня. Одна из возможных реализаций такого «осреднения» основана на том, что стохастические движения элементов происходят значительно быстрее, чем изменения макросостояния системы как целого. Поэтому в течение малого промежутка времени осредненное состояние микроуровня можно рассматривать как локально-равновесное, а изменение макросостояния в системном масштабе времени — как последовательность этих состояний.

Продемонстрируем данный подход на примере макросистемы с самовоспроизведением и локально-термодинамическим распределением. Макросистема состоит из n блоков, связанных между собой.

Состояние блоков характеризуется векторами состояния $z^1(t), z^2(t), \ldots, z^n(t)$, а связей — потоками $Y(\tau) = [y_{ij}(\tau),\ \ i,j = 1,2,\ldots,n]$. Обозначим вектор состояния системы как целого $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\}$. Очевидно, что состояния блоков и потоки как-то зависят от состояния системы, т. е.

$$z^i(t) = z^i(x(t),t), \quad i = 1,\ldots,n; \quad Y(\tau) = Y(x(t),\tau).$$

Предполагается, что изменение вектора $x(t)$ происходит под влиянием медленного процесса самовоспроизведения (в блоках, макроуровень) и быстрого процесса распределения (между блоками, микроуровень). Последовательностью его локально-равновесных состояний можно характеризовать как

$$Y^*(x(t),t) = \{y^*_{12}(x(t),t), \ldots, y^*_{n,n-1}(x(t),t)\}.$$

Таким образом, изменение состояния макросистемы можно описать нелинейной системой дифференциальных уравнений, в правую часть которых входит не текущее состояние распределительного процесса, а его локально-равновесное состояние:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(z(x(t), Y^*(x(t),t)) = f(x(t), Y^*(x(t)), t). \tag{1}$$

Локально-равновесное состояние микроуровня рассматриваемой системы есть состояние, максимизирующее энтропию на допустимом ресурсном множестве. Параметры этой модели зависят от состояния $x(t)$ макросистемы. Имеем:

$$Y^*(x) = \arg\max_y \bigl(H(a(x), G(x), y \,|\, y \in D(\omega(x), g(x))\bigr). \tag{2}$$

$$D(\omega(x), q(x)) = \{y : \Phi_K(\omega(x), y) \leqslant q_k(x), \quad k = 1,2,\ldots,r\} \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) описывает динамическую модель автономной макросистемы.

Траектории движения такой макросистемы обусловлены некоторым начальным состоянием и механизмами процессов самовоспроизведения и распределения. Влияние внешней среды на макросистему может реализовываться либо в виде возмущений, искажающих траектории ее свободного движения, либо в виде управлений, целенаправленно изменяющих эти траектории. Внешняя среда может влиять на процесс самовоспроизведения $(v_s(t))$, так и на распределительный процесс $(v_D(t))$. В последнем она может оказывать влияние как на механизм распределительного процесса, т. е. на параметры энтропии, так и на конфигурацию ресурсного множества.

Уравнения динамической модели неавтономной макросистемы можно представить в следующем виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)), Y^*(x(t)), v_s(t), t]. \tag{4}$$

$$Y^*(x) = \arg\max_y \big(H(a(x), G(x), v_D(t), y | y \in D(\omega(x), q(x), v_D(t))\big). \tag{5}$$

$$D\big[\omega(x), q(x), v_D(t)\big] = \big\{y : \Phi_k(\omega(x), v_D(t), y) \leqslant q_k(x, v_D(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, r\big\}. \tag{6}$$

Особенность динамических моделей макросистем как математического объекта заключена в нелинейном операторе (2), (5), который описывается параметрической задачей математического программирования. Уравнения (1), (4) образуют новый класс нелинейных дифференциальных уравнений. Исследования качественных свойств этого класса находятся в начальной стадии. Первые результаты связаны с анализом ограниченности траекторий уравнений данного класса, которые моделируют некоторые частные виды макросистем.

Весьма распространенной в прикладных задачах является модель следующего вида:

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = f_s(x(t)) + BY^*(x(t)), \tag{7}$$

$$Y^*(x(t)) = \arg\max_y \big(H(a(x), G(x), y) | Ty = q(x(t)),\ y > 0\big), \tag{8}$$

где матрица T имеет единичную первую строку, что соответствует ограничению количества участников распределительного процесса.

Развитие методов качественного анализа этого класса представляет собой важную с теоретической и полезную с прикладной точки зрения задачу. Здесь прежде всего следует выделить исследование существования, единственности или неединственности особых точек, их устойчивости и бифуркаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995.
2. *Левченков В. С.* Математическая теория систем и теория игр. Системные исследования. Методологические проблемы. М.: Наука, 1982.
3. *Попков Ю. С.* Теория макросистем и ее применение. М.: Эдиториал УРСС, 1999.