ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Г. В. М а р т ы н о в (Москва, ИППИ РАН). **Проверка гауссовости случайного процесса.**

В различных приложениях статистических методов часто предполагается, что встречающиеся на практике случайные процессы являются гауссовскими. Здесь рассматривается задача проверки такой гипотезы. Пусть наблюдаемый случайный процесс $S(t)$ на $[0,1]$ при нулевой гипотезе является гауссовским процессом с нулевым математическим ожиданием и заданной ковариационной функцией $K_S(t,\tau)$, $t,\tau \in [0,1]$. В качестве альтернативных процессов выбираются все остальные гауссовские и негауссовские процессы. Критерий основывается на n реализациях $S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t)$, $t \in [0,1]$, процесса $S(t)$. Выберем ортонормальный базис, сформированный собственными функциями $g_1(t), g_2(t), \ldots$ ковариационного оператора с ядром $K_S(t,\tau)$. Разложения наблюдаемого процесса $S(t)$ и его реализаций $S_i(t)$, $i=1,2,\ldots$, есть $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3,\ldots)$ и $\mathbf{s}_i=(s_{i1},s_{i2},s_{i3},\ldots)$, соответственно. Вектор $\mathbf{s}$ при нулевой гипотезе имеет нормально распределенные независимые компоненты. Он может быть преобразован к случайному вектору $\mathbf{T}=(T_1,T_2,T_3,\ldots)$, $\mathbf{T}\in[0,1]^\infty$, с независимыми на $[0,1]$ компонентами. Наблюдаемые реализации $\mathbf{s}_i$ аналогичным образом преобразовываются к случайным векторам $\mathbf{T}_i=(T_{i1},T_{i2},T_{i3},\ldots)$ на $[0,1]^\infty$. Преобразованные таким образом реализации процесса $S(t)$ остаются независимыми. Введем «функцию распределения» $F(\mathbf{t})=t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}t_3^{\alpha_3}\ldots$. Здесь $\alpha_i>-1$ должна стремиться к нулю достаточно быстро. Соответствующим образом вводится и «эмпирическая функция распределения» $F_n(\mathbf{t})=n^{-1}\sharp\{\mathbf{T}_i : T_{i1}\leqslant t_1^{\alpha_1}, T_{i2}\leqslant t_2^{\alpha_2},\ldots\}$, $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots)$. Эмпирический процесс $\xi_n(\mathbf{t})=\sqrt{(n)}(F_n(\mathbf{t})-F(\mathbf{t}))$, $\mathbf{t}\in[0,1]^\infty$, сходится слабо в к гауссовскому процессу в гильбертовом пространстве $L_2(L_2[0,1])$. Этот процесс имеет при нулевой гипотезе нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию

$$K(\mathbf{t},\mathbf{v})=\prod_{i=1}^{\infty}\min\{t_i^{\alpha_i},v_i^{\alpha_i}\}-\prod_{i=1}^{\infty}t_i^{\alpha_i}v_i^{\alpha_i}.$$

Бесконечномерный аналог статистики омега-квадрат (Крамера–Мизеса) может быть записан следующим образом

$$\omega_n^2=n\int_{[0,1]^\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\infty}I_{T_{i,j}<t_j}-\prod_{i=1}^{\infty}t_i^{\alpha_i}\Big)^2 d\mathbf{t}.$$

Предельное распределение этой статистики вычисляется на основе результатов, содержащихся в работах [1–4].

Статистика ω_n^2 может быть вычислена методом Монте-Карло. В свою очередь, распределение статистики вычислено также по методу Монте-Карло. Результаты вычисления квантилей предельного распределения статистики ω_n^2 при $\alpha_i=i^{-a(1-i^{-b})}$, $a=2,5$, $b=0,5$. Интегрирование в формуле для ω_n^2 производилось по кубу $[0,1]^{100}$. Получены следующие процентные точки: $\mathbf{P}\{\omega_n^2\leqslant 0,90\}=0,17$ и $\mathbf{P}\{\omega_n^2\leqslant 0,95\}=0,21$.

Предложенный метод может быть также применен для для проверки гипотезы о равномерном распределении в многомерном кубе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Deheuvels P.*, *Martynov G.* Karhunen–Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. — In: Progress in Probability. V. 55. Basel etc.: Birkhäuser, 2003, p. 57–93.
2. *Мартынов Г. В.* Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978, 80 с.
3. *Мартынов Г. В.* Статистические критерии, основанные на эмпирических процессах, и связанные с ними вопросы.— Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн., матем. статист., теорет. киберн. Т. 30. М.: ВИНИТИ, 1992, с. 3–112.
4. *Кривякова Э. Н.*, *Мартынов Г. В.*, *Тюрин Ю. Н.* О распределении статистики ω^2 в многомерном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, № 2, с. 415–420.