ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

А. В. Васин (Пенза, ПГУ). **О ненадежности схем в одном бесконечном базисе.**

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе B. Предполагаем, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0,1/2)$ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию ψ, а в неисправном — функцию $\overline{\psi}$. Считаем, что схема S из ненадежных элементов реализует булеву функцию $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы S появляется значение $f(\mathbf{a})$.

Ненадежностью $P(S)$ схемы S назовем максимальную вероятность ошибки на выходе схемы S при всевозможных входных наборах схемы. Пусть $P_\varepsilon(f)=\inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной (асимптотически наилучшей) по надежности*, если $P(A)\sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть

$$\Psi=\{0,1,\overline{x}_1\}\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i\},$$

$$\Theta=\{0,1\}\cup\bigcup_{k=2}^{\infty}\{\mathop{\&}_{i=1}^{k} x_i\}\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{k}\{\bar{x}_j\&\mathop{\&}_{i=1,i\neq j}^{k} x_i\},$$

а Ψ^*, Θ^* — множество функций двойственных функциям Ψ и Θ соответственно.

С. И. Аксенов [2] сформулировал следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть B — полный базис и $B\not\subseteq\Psi$, $B\not\subseteq\Psi^*$, $B\not\subseteq\Theta$, $B\not\subseteq\Theta^*$. Тогда любую булеву функцию f можно реализовать схемой S над B с ненадежностью $P(S)\leqslant 4\varepsilon+c\varepsilon^2$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, где константы $c>0$, $\varepsilon_0\in(0,1/2)$ зависят от базиса.*

Однако теорема 1 — только верхняя оценка, которая не дает представления о ненадежности схем в базисах B, удовлетворяющих $B\subseteq\Psi$, или $B\subseteq\Psi^*$, или $B\subseteq\Theta$, или $B\subseteq\Theta^*$.

С. И. Аксеновым [3] получена верхняя оценка ненадежности схем в произвольном полном конечном базисе при инверсных неисправностях на выходах элементов. Он доказал, что существуют такие константы $\varepsilon_0\in(0,1/2)$ и $d>0$, зависящие от базиса, что любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что $P(S)\leqslant 5\varepsilon+d\varepsilon^2$ при $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$.

В работе [4] явно найдены константы d, ε_0 и доказана теорема 2.

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2014 г.

Теорема 2. *В произвольном полном конечном базисе* B *любую булеву функцию* f *можно реализовать схемой* A *с ненадежностью* $P(A) \leqslant 5\varepsilon + 182\varepsilon^2$ *при* $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Теорема 2 справедлива и для базисов B, удовлетворяющих условию $B \subseteq \Psi$, или $B \subseteq \Psi^*$.

Автором в [1] решена задача построения асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов в полных базисах из трехвходовых элементов. В [1] доказаны нижние оценки ненадежности для базисов $B \subset \{0, 1, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3\}$, $B \subset \{0, 1, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$, и показано, для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную 5ε при $\varepsilon \to 0$. Не трудно видеть, что эти базисы являются подмножествами Ψ или Ψ^*.

Нижние оценки ненадежности схем для произвольных базисов $B \subset \Psi$ или $B \subset \Psi^*$ были получены в этой работе.

Обозначим $K(n)$ — множество булевых функций f, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не представимых в виде $(x_i^a \& g(\widetilde{x}))^b$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \;\; a, b \in \{0, 1\})$ и сформулируем теорему о нижних оценках ненадежности, для названных базисов.

Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* B *— полный конечный базис и* $B \subset \Psi$ *, или* $B \subset \Psi^*$. *Пусть функция* $f\widetilde{x}) \in K(n)$, *и* S *— любая схема, реализующая функцию* f. *Тогда* $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ *при* $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Из теорем 2 и 3 следует, что в любом из полных базисов B таких, что $B \subset \Psi$, $B \subset \Psi^*$, для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 14-01-31360 и № 14-01-00273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васин А. В.* Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов. Дисс. канд. физ.-матем. наук. Пенза, 2010, 100 с.
2. *Аксенов С. И.* О надежности схем в широком классе полных базисов. — Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова. (Москва, МГУ, 18–23 июня 2007 г.)./ Под ред. О. М. Касим-Заде. М: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007, с. 55–56.
3. *Аксенов С. И.* О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов. — Изв. ВУЗов. Поволжский регион. Естественные науки, 2005, № 6(21), с. 42–55.
4. *Алехина М. А.*, *Васин А. В.* О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных. — Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физ.-матем. науки. Изд-во Казанского университета, 2009, т. 151, кн. 2, с. 25–35.