ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2014

Н. П. Величко (Шахты, ИСОиП(ф)ДГТУ). **Модулярные амальгамы Орлича.**

Амальгамой ([1]) из L^p и l^q на вещественной оси называется пространство (L^p, l^q), состоящее из функций, которые локальны в L^p и имеют характер l^q на бесконечности в том смысле, что L^p-нормы над интервалами $[n, n+1]$ образуют l^q-последовательности. В случае, когда $1 \leqslant p,\ q < \infty$, норма $\|f\|_{p,q} = \{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\int_n^{n+1} |f(x)|^p]^{q/p}\}^{1/q}$ превращает (L^p, l^q) в банахово пространство.

Обобщим понятие амальгамы на модулярные пространства.

Пусть X и Y — некоторые векторные пространства над полем K; обозначим $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$ (соответственно $\overline{\mathbf{R}}^+ = [0, \infty]$). По аналогии с известными ([2]) определениями модуляра и модулярного пространства введем следующие понятия.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $M\colon X \to Y$ назовем *модулярным оператором*, если выполняются условия: (а) $M(x) = O_y \Leftrightarrow x = O_x$ (O_x, O_y — нули пространств X и Y соответственно); (в) $M(-x) = M(x)$; (с) $M(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant M(x_1) + M(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$. Если условие (с) заменить на (с1) $M(\alpha x_1 + \beta x_2) \leqslant \alpha M(x_1) + \beta M(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X,\ \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$, то модулярный оператор называется *выпуклым.* Если условие (с) заменить на (с2) $M(x_1 + x_2) \leqslant M(x_1) + M(x_2)$ ($x_1, x_2 \in X$), то модулярный оператор называется *вогнутым.*

Для любого модулярного оператора выполняется неравенство: (с3) $M(x_1 + x_2) \leqslant M(2x_1) + M(2x_2)$ $(x_1, x_2 \in X)$.

Легко видеть, что если в определении 1 пространство Y заменить на $\overline{\mathbf{R}}^+ = [0, \infty]$, то функционал M будет модуляром в смысле [2].

Пусть $\rho\colon Y \to \overline{\mathbf{R}}^+$ есть модуляр, а $M\colon X \to Y$ — модулярный оператор. Рассмотрим композицию вида $\rho M = \rho(M(x))\colon X \to \overline{\mathbf{R}}^+$.

О п р е д е л е н и е 2. Композицию ρM будем называть *модулярной амальгамой*, если модуляр $\rho\colon Y \to \overline{\mathbf{R}}^+$ и модулярный оператор $M\colon X \to Y$ таковы, что композиция ρM является модуляром.

В следующих теоремах приведены условиях, при которых композиция ρM является модулярной амальгамой.

Теорема 1. *Пусть $\rho\colon Y \to \overline{\mathbf{R}}^+$ — модуляр, а $M\colon X \to Y$ — выпуклый модулярный оператор, тогда композиция $\rho M\colon X \to \overline{\mathbf{R}}^+$ есть модулярная амальгама. При этом, если ρ — выпуклый модуляр, то ρM — выпуклая модулярная амальгама.*

Теорема 2. *Пусть $M\colon X \to Y$ — модулярный оператор. Для того чтобы композиция ρM являлась модулярной амальгамой, необходимо и достаточно, чтобы $\rho\colon Y \to \overline{\mathbf{R}}^+$ являлся вогнутым модуляром. Если M — вогнутый модулярный оператор, то композиция ρM — вогнутая модулярная амальгама.*

О п р е д е л е н и е 3. Модулярное пространство $X_{\rho M} = \{x \in X\colon \lim_{\lambda \to 0} \rho M(\lambda x) = 0\}$, порождаемое модулярной амальгамой ρM, будем называть *амальгамным модулярным пространством.*

Для модулярной амальгамы ρM в $X_{\rho M}$ можно определить F-квазинорму по формуле $\|x\|_{\rho M} = \inf\{t > 0 : \rho M(x/t) \leqslant t\}$. Если модулярная амальгама ρM — выпуклая, то в $X_{\rho M}$ можно определить норму $\|x\|_{\rho M} = \inf\{t > 0 : \rho M(x/t) \leqslant 1\}$.

П р и м е р. Пусть $n \in \mathbf{N}$, φ_1 и φ_2 — некоторые φ-функции. Рассмотрим оператор вида $M_n = \int_n^{n+1} \varphi_1(|f(x)|)\,dx$ и функционал $\rho = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(|y_n|)$. Оператор $M_n : L^{\varphi_1} \to l^{\varphi_2}$ является модулярным оператором, функционал $\rho : l^{\varphi_2} \to \mathbf{R}^+$ является модуляром. Если φ_1 — выпуклая φ-функция, а φ_2 — произвольная φ-функция, то для M и ρ выполнены условия теоремы 1. Если φ_1 — произвольная φ-функция, а φ_2 — вогнутая φ-функция, то для M и ρ выполнены условия теоремы 2. В обоих случаях композиция $\rho M = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(|\int_n^{n+1} \varphi_1(|f(x)|)\,dx|)$ является модулярной амальгамой. Тогда множество вида $(l^{\varphi_1}, l^{\varphi_2}) = \{f \in l^{\varphi_1} : \lim_{\lambda \to 0} \rho M(\lambda f) = 0\}$ есть модулярное амальгамное пространство. Будем называть такое пространство *амальгамой Орлича*. В амальгаме Орлича можно ввести F-квазинорму: $\|f\|_{\varphi_1\varphi_2} = \inf\{t > 0 : \rho M(f/t) \leqslant t\}$, а если φ_1 и φ_2 — выпуклые φ-функции, то $\rho_{\varphi_1\varphi_2}$ — выпуклый модуляр, и можно ввести норму по формуле $\|f\|_{\varphi_1\varphi_2} = \inf\{t > 0 : \rho M(f/t) \leqslant 1\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fournier J. J. F.*, *Stewart J.* Amalgams of L^p and l^q. — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1985, v. 13, №1, p. 1–21.
2. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin etc.: Springer, 1983. (Ser. Lect. Notes Math., B. 1034.)