

О. А. И з о т о в а (Рославль, Филиал МГИУ в г. Рославле). **Случайная функция напряжения и ее связь с задачами плоской теории упругости.**

Известно, что при решении плоской задачи теории упругости большую роль играет введенная Эри (в 1862 г.) вспомогательная функция, благодаря которой был создан плодотворный метод решения задач плоской теории упругости.

Так, при отсутствии объемных сил, существует некоторая функция $U(x, y)$, через которую напряжения выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Функцию $U = U(x, y)$ называют *функцией напряжения или функцией Эри*.

Через функцию $U(x, y)$ выражаются и компоненты смещений:

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U, \quad \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — компоненты смещений; λ , μ — коэффициенты Ламе; $\Delta U = \sigma_x + \sigma_y$ (Δ — оператор Лапласа).

Кроме того, известно, что функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\Delta \Delta U = -\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (3)$$

Следовательно, функция $U(x, y)$ является бигармонической и, в свою очередь, может быть представлена с помощью аналитических функций комплексного переменного.

На протяжении многих лет функцию напряжения $U(x, y)$, через которую выражали компоненты напряжения (1) и смещения (2) при решении плоских задач теории упругости, рассматривали как детерминированную, принадлежащую пространству функций, удовлетворяющих условию Гёльдера [1].

Детерминированные функции позволили создать «хороший» аппарат для моделирования плоских задач теории упругости однородного изотропного тела [2]. Однако, решения задач, во многих случаях описываются приближенно. Это связано с тем, что на практике, как правило, приходится работать с нагрузками и контурами, заданными случайным образом. Следовательно, при решении задач этот факт надо учитывать.

Таким образом, функция напряжения $U(x, y)$ в общем случае должна рассматриваться как случайная.

Для работы с функциями, заданными случайным образом, было расширено пространство функций Гёльдера на пространство случайных функций, сходящихся в среднем квадратическом [3], а так же была построена более общая математическая модель для решения линейных задач теории упругости однородного тела, учитывающая случайный характер нагрузок и форму тела [4].

Рассматривая основные задачи теории упругости, можно показать, что контурные условия для случайной функции $U(x, y)$ в случае первой основной задачи принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int_0^s Y_n ds + C_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + C_2, \quad (4)$$

где X_n и Y_n — внешние усилия, заданные на контуре L , являющиеся случайными величинами; 0 и s — дуговые абсциссы точек $z_0(0)$ и $z(s)$, отсчитываемые от точки z_0 до z в положительном направлении; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение стохастического дифференциального уравнения (3) можно записать в виде:

$$U(x, y) = \operatorname{Re} [\varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)], \quad z = x + yi, \quad (5)$$

или

$$U(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi_0(z) + \bar{\varphi}_0(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_1(z) + z\bar{\varphi}_1(\bar{z})), \quad (6)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ — случайные аналитические функции.

Итак, случайная функция напряжения $U(x, y)$ удобна для описания решения задач плоской теории упругости в случае, когда нагрузка на тело носит случайных характер и форма тела задана с определенными допущениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М: Наука, 1977, 640 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
3. Изотова О. А. Новый класс функций Гёльдера в среднем квадратическом, обобщающий класс функций Гёльдера на случай стохастических процессов. — Обзорение прикл. и промысл. матем., 2010, т. 3, в. 17, с. 415–416.
4. Юденков А. В., Адигамов А. Э., Изотова О. А., Володченко А. М. Математические модели задач теории упругости для анизотропного тела на классе случайных функций. — Горный информационно-аналитический бюллетень. М.: изд-во МГГУ, 2010, № 1.