ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 **МАТЕМАТИКИ** Выпуск 4
2014

А. М. Ветошкин (Москва, МГУЛеса). **Компактная форма формулы Клайна.**

Формула Клайна позволяет вычислить псевдообратную матрицу (см. [1], [2]) для блочной матрицы. Пусть имеется блочная матрица

$$A = [U : V].$$

Определим следующие матрицы:

$$C_V = (I - UU^+)V, \quad C_U = (I - VV^+)U, \tag{1}$$

$$P_V = I - C_V^+ C_V, \quad P_U = I - C_U^+ C_U, \tag{2}$$

$$K_V = [I + P_V V^* U^{+*} U^+ V P_V]^{-1}, \quad K_U = [I + P_U U^* V^{+*} V^+ U P_U]^{-1}, \tag{3}$$

Тогда формулу Клайна [2] можно записать в двух вариантах:

$$A^+ = \begin{bmatrix} C_U^+ + P_U K_U U^* V^{+*} V^+ (I - U C_U^+) \\ C_V^+ + P_V K_V V^* U^{+*} U^+ (I - V C_V^+) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

или

$$A^+ = \begin{bmatrix} U^+ - U^+ V C_V^+ - U^+ V P_V K_V V^* U^{+*} U^+ (I - V C_V^+) \\ V^+ - V^+ U C_U^+ - V^+ U P_U K_U U^* V^{+*} V^+ (I - U C_U^+) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Второй вариант формулы Клайна (5) позволяет переписать ее в гораздо более компактном виде.

Как легко убедиться, матрицы P_V и K_V коммутируют. Матрица P_V — проектор, причем $P_V = P_V^*$. поэтому

$$P_V K_V = P_V K_V P_V^*, \tag{6}$$

аналогично $P_U K_U = P_U K_U P_U^*$.

Хорошо известна следующая формула, правильность которой можно проверить непосредственно:

$$M^*(I + MM^*)^{-1} M = I - (I + M^* M)^{-1}. \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7) для части верхнего блока (5), получим:

$$U^+ V P_V K_V V^* U^{+*} = I - [I + U^+ V P_V V^* U^{+*}]^{-1}. \tag{8}$$

И аналогично для нижнего блока (5):

$$V^* U P_U K_U U^* V^{+*} = I - [I + V^+ U P_U U^* V^{+*}]^{-1}. \tag{9}$$

Определим следующие матрицы:

$$W_V = [I + U^+ V P_V V^* U^{+*}]^{-1}, \quad W_U = [I + V^+ U P_U U^* V^{+*}]^{-1}. \tag{10}$$

После несложных преобразований в (5), учитывая (8)–(10), получаем:

$$A^+ = \begin{bmatrix} W_V U^+ (I - V C_V^+) \\ W_U V^+ (I - U C_U^+) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Эту формула дает компактный вариант формулы Клайна. Формула (11) «вдвое» короче чем (4), и тем более, короче чем (5). Все три варианта — (4), (5), (11) — предполагают вычисление U^+, V^+ и величин (1), (2). А вычисление матриц W_U, W_V в (10), вообще говоря, не сложнее чем вычисление K_U, K_V в (3). Таким образом, получили такое утверждение.

Теорема. *Для произвольной блочной матрицы* $A = [U : V]$ *выполняется*

$$A^+ = [U : V]^+ = \begin{bmatrix} W_V U^+ (I - V C_V^+) \\ W_U V^+ (I - U C_U^+) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где матрицы $W_U, W_V, C_U, C_V, P_U, P_V$ *определяются в* $(1), (2), (10)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В. В.* Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006, 544 с.
2. *Cline R. E.* Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix. — J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, № 3, p. 588–600.