ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

В. Г. Выскребцов (Москва, ТВП). **О возможности существования точного решения уравнений Навье–Стокса на примере расчета начального участка в круглой трубе.**

Рассматривается попытка решения уравнений движения ньютоновской жидкости (уравнения Навье–Стокса), с использованием рядов Фурье. Анализируется осесимметричное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости на начальном участке входа в круглую трубу, при котором течение описывается лишь двумя проекциями скорости.

Ключевые слова: Уравнения Навье–Стокса, ламинарные течения, ротор скорости, точные решения, течение в круглой трубе, начальный участок Гагена, течение Пуазейля.

Уравнение Навье–Стокса при условии несжимаемости жидкой среды можно представить в виде, в котором явно выделено выражение для полной энергии (суммы энергии давления, положения и кинетической энергии) жидкой частицы:

$$\mathrm{rot}\mathbf{V}\times\mathbf{V}=-\mathrm{grad}\Big(\frac{P}{\rho}+\Pi+\frac{\mathbf{V}^2}{2}\Big)-v\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{V}. \tag{1}$$

В случае осесимметричного течения в круглой трубе вдоль координаты z проекция скорости $U_E=0$, т. е. $\mathbf{V}(U_r,U_E,U_r)=\mathbf{V}(U_r;0;U_Z)$. Поскольку одна из проекций скорости равна нулю, запись уравнений движения для осесимметричного движения проще, чем пространственного. С учетом этого условие несжимаемости имеет вид:

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{V}=(rU_r)_r^I+(rU_z)_Z^I=0. \tag{2}$$

Выражение для ротора скорости $\mathbf{V}$ принимает вид:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\mathrm{rot}\,\mathbf{V}(U_r;0;U_z)=(0;(U_r)_Z^I-(U_z)_r^I;0)=(0;\Omega;0). \tag{3}$$

Здесь для краткости введено обозначение: $\Omega=(U_r)_Z^I-(U_z)_r^I$. При таком обозначении векторные уравнения (2) сводятся к одному

$$(U_z\Omega)_Z^I+(U_r\Omega)_r^I=-v\{(\Omega)_{ZZ}^{II}+[(r\Omega)_r^I/r]_r^I\}. \tag{4}$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде комбинации из степенного и тригонометрического рядов, представив аксиальную составляющую скорости $U_r(r;z)$ в виде суммы степенного ряда и ряда Фурье по синусам, а именно, в виде

$$U_r(r;z)=U_r(r;0)(1-z/x_0)+\sum_n B_n\sin(\pi nz/x_0). \tag{5}$$

При этом $B_n=\sum_m b_{nm}r^m=b_{n1}r+b_{n2}r^2+b_{n3}r^3+\cdots,\quad n=1,2,3,\ldots$

Здесь x_0 — длина начального участка (участка Гагена, т. е. участка, на котором происходит перестроение начального профиля скоростей в пуазейлевый). Начальное значение радиальной проекции скорости $U_r(r;0)$ в силу ее непрерывности считаем возможным представить в виде степенного ряда:

$$U_r(r;0) = U_z(0;0)(m_1 r + m_2 r^2 + m_3 r^3 + \cdots). \tag{6}$$

Аксиальную проекцию скорости U_z определим из уравнения неразрывности (3) (при этом значение $U_z(r;0)$ также считаем разлагаемым в степенной ряд) с учетом (5) и (6) следующим образом:

$$U_z(r;0) = U_z(0;0)(1 - k_1 r - k_2 r^2 - k_3 r^3 - \cdots). \tag{7}$$

Здесь $k_j = \mathrm{const}\quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$.

Тогда $U_z(r;z) = U_z(r;0) - (1/r)\int (rU_r)^I_r dz = U_z(0;0)(1 - k_1 r - k_2 r^2 - k_3 r^3 - \cdots) - U_z(0;0)\{2m_1 + 3m_2 r + 4m_3 r^2 + \cdots\}[z - z^2/(2x_0)] + (x_0/\pi)\{2b_{11} + 3rb_{12} + 4r^2 b_{13} + \cdots\}[\cos(\pi z/x_0) - 1] + (x_0/2\pi)\{2b_{21} + 3rb_{22} + 4r^2 b_{23} + \cdots\}[\cos(2\pi z/x_0) - 1] + \cdots$

Граничные условия для осевой проекции скорости состоят в том, что при входе в трубу распределение скоростей $U_z(r;0)$ имеет вид (7), а по окончании начального участка длиной x_0, когда радиальная проекция скорости полностью гасится и течение становится чисто Пуазейлевым, имеет место параболическое распределение скорости, т. е.

$$U_r(r;x_0) = 0; \quad U_z(r;x_0) = U - U(r/r_0)^2. \tag{8}$$

Здесь U — максимальная скорость течения на оси, т. е. $U = U_z(0;0)$, r_0 — радиус трубы. Далее, используя выражения для проекций скорости, вычислим проекцию ротора скорости:

$$\begin{aligned}
\Omega &= (U_r)^I z - (U_z)^I_r \\
&= U(m_2 r^2 + m_3 r^3 + \cdots)(-1/x_0) + (\pi/x_0)(b_{11} r + b_{12} r^2 + \cdots)\cos(\pi z/x_0) \\
&\quad + 2(\pi/x_0)(b_{21} r + b_{22} r^2 + \cdots)\cos(2\pi z/x_0) + \cdots + U(k_1 + 2k_2 r + 3k_3 r^2 + \cdots) \\
&\quad + U\{3m_2 + 8m_3 r + 15 m_4 r^2 + \cdots\}[z - z^2/(2x_0)] \\
&\quad - (x_0/\pi)\{3b_{12} + 8rb_{13} + 15r^2 b_{14} + \cdots\}[\cos(\pi z/x_0) - 1] \\
&\quad - (x_0/2\pi)\{3b_{22} + 8rb_{23} + 15r^2 b_{24} + \cdots\}[\cos(2\pi z/x_0) - 1] - \cdots
\end{aligned} \tag{8 a}$$

Теперь, используя уравнение неразрывности (2), упростим выражение (4):

$$(U_z\Omega)^I_Z + (U_r\Omega)^I_r = (U_z)^I_Z\Omega + U_z(\Omega)^I_z + (U_r)^I_r\Omega + U_r(\Omega)^I_r = -U_r\Omega/r + U_z(\Omega)^I_z + U_r(\Omega)^I_r. \tag{9}$$

Отметим, что $(r\Omega)^I_r = A_0(z) + 2rA_1(z) + 3r^2 A_2(z) + \cdots$ согласно (8 а).

В соответствии с этим

$$\left[\frac{(r\Omega)^I_r}{r}\right]^I_r = \left\{\frac{A_0(z)}{r} + 2A_1(z) + 3rA_2(z) + 4r^2 A_3(z) + \cdots\right\}^I_r, \tag{10}$$

и, значит, $A_0(z) = 0$. Далее, подставляя в (4) слагаемые, выраженные в виде рядов, получим с точностью до первого порядка разложения в степенной ряд по радиусу следующее (после сокращения на общий множитель r) равенство:

$$\begin{aligned}
&\{U + 2(x_0/\pi)\{b_{11}[\cos(\pi z/x_0) - 1] + b_{21}/2[\cos(2\pi z/x_0) - 1] + \cdots\}\} \\
&\quad \times\{(\pi/x_0)^2[b_{11}\sin(\pi z/x_0) + 4b_{21}\sin(2\pi z/x_0) + \cdots] + 8Um_3(1 - z/x_0) \\
&\qquad -8[b_{13}\sin(\pi z/x_0) + b_{23}\sin(2\pi z/x_0) + \cdots]\} \\
&= -v\{(\pi/x_0)^3[b_{11}\cos(\pi z/x_0) + 8b_{21}\cos(2\pi z/x_0) + \cdots] - 8U(m_3/x_0) \\
&\qquad -(\pi/x_0)8\{b_{13}\cos(\pi z/x_0) + 2b_{23}\cos(2\pi z/x_0) + \cdots\} \\
&\quad +4Uk_4 + 24Um_5[z - z^2/(2x_0)] \\
&\quad -24(x_0/\pi)\{b_{15}[\cos(\pi z/x_0) - 1] + b_{25}/2[\cos(2\pi z/x_0) - 1] - \cdots\}\}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Данное выражение должно быть тождеством, поэтому сумма постоянных коэффициентов, не зависящих от переменной z, в обеих частях равенства должна быть равна нулю. Однако согласно соотношению $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ выражения в левой части равенства (11) можно представить как сумму синусов кратных углов, а тригонометрические выражения в правой части — в виде косинусов этих же углов $(\pi nz/x_0)$. Но поскольку тождественное равенство тригонометрических функций синуса и косинуса невозможно, отсюда следует равенство нулю всех коэффициентов b_{nj}, где $n, j = 1, 2, \ldots$

Это должно быть истолковано как то, что решения исходного уравнения (1) с помощью его представления в виде тригонометрического ряда не существует. Можно еще отметить, что если искать решение (1) в виде двойного степенного ряда, то результат оказывается аналогичным рассмотренному выше.

Выявленное противоречие может быть обусловлено различными причинами. Во-первых, возможно, что принятая зависимость (5) для выражения радиальной составляющей скорости $U_r(r; z)$ не имеет места в действительности, т. е. не может быть выражена в элементарных функциях. Во-вторых, возможно, что использованные в расчетах граничные условия на самом деле другие, так как не учитывают своего рода удар частиц жидкости с кромкой трубы при входе в трубу. Наконец, возможно, что сами исходные уравнения (1) не адекватно описывают движение вязких частиц. К этому выводу имеются основания, так как уравнения Навье–Стокса не учитывают возможное закручивание частиц жидкости, т. е. движение жидких частиц по траекториям, имеющим кручение и т. д. По мнению автора, экспериментальных данных для создания основных гипотез расчета начального участка в настоящее время недостаточно и требуется дополнительный экспериментальный материал.