ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

**И. В. Павлов** (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Сведение деформаций 1-го рода к слабым деформациям.**

В настоящем докладе предложен способ сведения деформированного стохастического базиса 1-го рода к слабо деформированному. Данная техника имеет важное значение при исследовании деформированных финансовых $(B,S)$-рынков. Определения деформаций, деформированных стохастических, деформированных мартингалов и т. д. можно найти в [1], [2].

Пусть $\tau : \Omega \to \mathbf{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ — момент остановки (м. о.) относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (если $\tau$ допускает и бесконечные значения, то мы используем термин «марковский момент»). Пусть также $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — произвольная деформация. Для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$ обозначим $Q^{(\tau)}(A) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\{\tau = i\})$. Ясно, что $Q^{(\tau)}$ — неотрицательная $\sigma$-конечная мера, совпадающая на $\{\tau = n\}$ при любом $n \in \mathbf{N}$ с мерой $Q^{(n)}$. Если м. о. $\tau$ принимает лишь конечное число значений, то мера $Q^{(\tau)}$ ограничена и не является нулевой. В дальнейшем нам понадобится деформация $\mathbf{R} = (R^{(n)} := \frac{Q^{(\tau\wedge n)}}{Q^{(\tau\wedge n)}(\Omega)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

Определение 1. Пусть $\mathbf{Q}$ — деформация. Процессы $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ и $\mathbf{Z}' = (Z'_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ называются $\mathbf{Q}$-*неотличимыми*, если $Z_n = Z'_n$ $Q^{(n)}$-п.н. для любого $n \in \mathbf{N}$.

Определение 2. Пусть $\mathbf{Q}$ — деформация, а $A$ и $B$ — два $\mathbf{F}$-согласованных подмножества множества $\Omega \times \mathbf{N}$, т. е. $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \times \{n\}, B = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n \times \{n\}$, где $A_n, B_n \in \mathcal{F}_n$. Эти множества называются $\mathbf{Q}$-*неотличимыми*, если $I_{A_n} = I_{B_n}$ $Q^{(n)}$-п.н. для любого $n \in \mathbf{N}$.

Ясно, что множества $A$ и $B$ из определения 2 являются $\mathbf{Q}$-неотличимыми тогда и только тогда, когда $Q^{(n)}(A_n \Delta B_n) = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$ ($\Delta$ — симметрическая разность множеств).

Определение 3. Пусть $\mathbf{Q}$ — деформация. Марковские моменты $\tau$ и $\tau'$ называются $\mathbf{Q}$-*неотличимыми*, если $Q^{(n)}(\{\tau = n\}\Delta\{\tau' = n\}) = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

**Предложение 1.** *Пусть $\mathbf{Q}$ — деформация 1-го рода, множества $A$ и $B$ из определения 2 являются $\mathbf{Q}$-неотличимыми, а $\tau_A$ и $\tau_B$ — дебюты этих множеств. Тогда марковские моменты $\tau_A$ и $\tau_B$ также $\mathbf{Q}$-неотличимы.*

**Следствие 1.** *Пусть $\mathbf{Q}$ — деформация 1-го рода, а $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(h'_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — две версии процесса плотностей, т. е. удовлетворяются равенства*

$$dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n dQ^{(n)}, \quad dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h' n dQ^{(n)}.$$

*Марковские моменты*

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0 : h_n = 0\} \tag{1}$$

*и*

$$\tau' = \inf\{n \geqslant 0 : h'_n = 0\}$$

*неотличимы.*

**Предложение 2.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ *— деформация* 1*-го рода, а марковский момент* $\tau$ *определен формулой* (1)*. Тогда для любого* $n \in \mathbf{N}$ $Q^{(n)}(\tau < n) = 0$ *и, следовательно,* $Q^{(n)}(\tau \geqslant n) = 1$ *.*

**Следствие 2.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ *— деформация* 1*-го рода, марковский момент* $\tau$ *определен формулой* (1) *и* $h_n^{(\tau)} := h_{\tau \wedge n}$*. Тогда случайные процессы* $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ *и* $(h_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ $\mathbf{Q}$*-неотличимы (т. е.* $(h_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ *также является процессом плотностей деформации* $\mathbf{Q}$ *).*

**Предложение 3.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ *— произвольная деформация и для любого* $n \in \mathbf{N}$ $\sigma$*-алгебра* $\mathcal{F}_n$ *полна относительно* $Q^{(n)}$ *. Если м. о.* $\tau$ *и* $\nu$ $\mathbf{Q}$*-неотличимы, то* $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\nu$ *и* $Q^{(\tau)} = Q^{(\nu)}$ *.*

**Следствие 3.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ *— деформация* 1*-го рода,* $\sigma$*-алгебра* $\mathcal{F}_n$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$ *полна относительно* $Q^{(n)}$ *и марковские моменты* $\tau$ *и* $\tau'$ *таковы, как в следствии* 1*. Тогда для любого* $n \in \mathbf{N}$ $\mathcal{F}_{\tau\wedge n} = \mathcal{F}_{\tau'\wedge n}$ *и* $Q^{(\tau\wedge n)} = Q^{(\tau'\wedge n)}$ *.*

**Теорема.** *Пусть* $\sigma$*-алгебра* $\mathcal{F}_n$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$ *полна относительно* $Q^{(n)}$*,* $\mathbf{Q}$ *— деформация* 1*-го рода, а* $\tau$ *— марковский момент, определенный формулой* (1)*. Тогда деформация* $\mathbf{R}$ *однозначно определяется деформацией* $\mathbf{Q}$ *и является слабой деформацией. При этом для любого деформированного субмартингала* 1*-го рода* $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *процесс* $(Z_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n}, R^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *есть слабо деформированный субмартингал, неотличимый от* $(Z_{\tau'\wedge n}, \mathcal{F}_{\tau\wedge n}, R^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *.*

З а м а ч а н и е. Теорема 1 с очевидными изменениями справедлива для деформированных супермартингалов 1-го рода и деформированных мартингалов 1-го рода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00637а и № 13-07-13159).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Назарько О. В.*, *Павлов И. В.* Рекуррентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией. — Вестник РГУПС, 2012, 45:1, с. 201–208.
2. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов. — Успехи матем. наук, 2013, т. 68, № 6, с. 184–185.