ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

А. О. Кондюков, Т. Г. Сукачева (Великий Новгород, НовГУ). **О фазовом пространстве первой начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка.**

Система уравнений Осколкова

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2 w_l - \nabla p + f, \\ 0 = \nabla\cdot v, \\ \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \quad \alpha_l \in \mathbf{R}_-, \quad \beta_l \in R_+, \quad l = 1,2,\ldots,K \end{cases} \tag{1}$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка K [1]. Здесь $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$ — вектор скорости жидкости, $p = p(x,t)$ — функция давления, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_k = f_k(x)$ — вектор внешнего воздействия в точке $(x,t) \in \Omega\times\mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞. Параметры λ, $\nu \in \mathbf{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответсвенно. Хорошо известно, что при некоторых отрицательных значениях параметра λ (а именно, $\lambda^{-1} \in \sigma(\nabla^2)$) такая задача, вообще говоря, не разрешима. Поэтому возникает проблема описания множества корректности этой задачи, понимаемого нами как фазовое пространство.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega\times\mathbf{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$\begin{aligned} &\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), w_l(x,y,0) = w_{l0}(x,y)\ \forall (x,y) \in \Omega, \\ &\psi(x,y,t) = \nabla^2\psi(x,y,t) = 0, w_l(x,y,t) = 0\ \forall (x,y,t) \in \partial\Omega\times\mathbf{R} \end{aligned} \tag{2}$$

для системы уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda\nabla^2)\nabla^2\psi_t = \nu\nabla^4\psi - \dfrac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(x,y)} + \sum\limits_{l=1}^{K}\beta_l\nabla^2\left(\dfrac{\partial w_{l1}}{\partial y} - \dfrac{\partial w_{l2}}{\partial x}\right) + g, \\ \dfrac{\partial w_{l1}}{\partial t} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_l w_{l1}, \\ \dfrac{\partial w_{l2}}{\partial t} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha_l w_{l2}, \quad \alpha_l \in \mathbf{R}_-, \quad l = 1,2,\ldots,K, \end{cases} \tag{3}$$

которая получится из системы (1) при $n = 3$, если положить $v_3 \equiv 0$ и формулами $v_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_2 = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ ввести функцию тока $\psi = \psi(x,y,t)$, определенную с точностью до аддитивной постоянной. Таким образом, система (3) моделирует плоскопараллельное течение вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта K -го порядка.

Преимущество задачи (2), (3) по сравнению с задачей Коши–Дирихле для уравнения (1) заключается в том, что фазовое пространство уравнения (3) может быть описано полностью при любых значениях параметра $\lambda \in \mathbf{R}$. Описание фазового пространства дается в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа на основе понятий относительно спектрально ограниченного оператора [2] и квазистационарной траектории для системы уравнений (3). Отметим, что доказанные теоремы обобщают результаты [3] на случай модели Кельвина–Фойгта ненулевого порядка и дополняют результаты [4].

Работа поддержана Министерством Образования и Науки Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания № 1.857.2014/К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А. П.* Начально–краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1988, т. 179, с. 126–164.
2. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht: VSP, 2003.
3. *Свиридюк Г. А.*, *Якупов М. М.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова. — Дифференц. уравнения, 1996, т. 32, № 11, с. 1538–1543.
4. *Сукачева Т. Г.* Об одной модели движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта ненулевого порядка. — Дифференц. уравнения, 1997, т. 33, № 4, с. 552–557.