ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2014

К. А. Поляков (Самара, СамГУ, СамГТУ). **Влияние пристеночного скольжения, на сопротивление шара движению в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса.**

Задача об обтекании шара вязкой жидкостью или о движении шара в вязкой жидкости является классической. Для малых чисел Рейнольдса эта задача имеет аналитическое решение в приближении Стокса [1] для случая бесконечной зоны влияния шара на поле скоростей в жидкости.

Более общее решение задачи можно получить, заменив условие прилипание жидкости к стенке условием скольжения с некоторой, возможно и нулевой, скоростью. Режим скольжения жидкости на стенке может реализовываться, например, если стенка покрыта слоем масляной пленки ввиду технологических особенностей течения. Если скорость этого скольжения можно оценить каким-либо способом, то задача об определении параметров течения жидкость упрощается, поскольку скорость скольжения будет использована как граничное условие на стенке шара. Поле скорости при наличии скольжения было получено в работе [2]. Одной из важных характеристик процесса обтекания шара является величина его полного сопротивления. Рассмотрим влияние скольжения жидкости по стенке шара на его полное сопротивление.

Записывая формальные выражения для компонент скорости через функцию тока, и подставляя их в уравнения Навье–Стокса, при условии малых чисел Рейнольдса приходим к уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0,$$

где Δ — оператор Лапласса для осесимметричного течения.

Для учета скольжения были использованы модифицированные граничные условия.

На поверхности шара: $R = a : \nu_r = 0, \ \ \nu_\theta = u_0 \sin\theta$,

На бесконечном удалении от шара: $R = \infty : \nu_r = \nu_\infty \cos\theta, \ \ \nu_\theta = -\nu_\infty \sin\theta$.

Использование этих условий приводит к следующему выражению для функции тока [2]

$$\psi = \sin^2\theta\Big(\frac{\nu_\infty}{2}R^2 - \frac{1}{2}Ra\Big(\frac{3\nu_\infty}{2} - \nu_0\Big) + \frac{1}{4}\frac{a^3}{R}(\nu_\infty - 2\nu_0)\Big). \tag{1}$$

Величина силы сопротивления шара выражается согласно соотношению

$$P_z = \iint\limits_S \Big(-p\cos\theta + \mu\frac{\partial w}{\partial R}\Big)ds, \tag{2}$$

где θ, R — полярные координаты миделевой плоскости параллельной набегающему потоку, μ, w, p — соответственно динамический коэффициент вязкости, проекция скорости на направление противоположное набегающему потоку и статическое давление, S — поверхность шара.

Выражая давление через уравнения Навье–Стокса с использованием функции тока получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R} &= \frac{v}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D\psi), \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial R}(D\psi). \end{aligned} \tag{3}$$

Подставим выражение для функции тока в (3), запишем полный дифференциал для давления и проинтегрируем, в результате получим

$$p = p_0 - \mu a\Big(\frac{3\nu_\infty}{2} - \nu_0\Big)\frac{\cos\theta}{R^2}. \tag{4}$$

Выражение для запишется в виде

$$w = \nu_R \cos\theta - \nu_\theta \sin\theta, \tag{5}$$

где выражения для компонент скорости определены в [2]. Подставляя (4) и (5) в (2) и интегрируя по поверхности шара, получаем выражение

$$P_z = 2\pi a\mu(3\nu_\infty - 2\nu_0). \tag{6}$$

Первое слагаемое в (6) представляет собой классическую формулу Стокса для сопротивления шара, второе слагаемое учитывает влияние скольжения на силу общего сопротивления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955, 521 с.
2. *Поляков К. А.* Математическая модель обтекания шара вязкой несжимаемой жидкостью при наличии скольжения на стенке. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4., с. 569.