ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

П. О. Москвичева (Челябинск, ЮУрГУ). **Устойчивость задачи Коши–Дирихле для обобщенного уравнения Хоффа.**

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbf{R}$ рассмотрим обобщенное уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + \Delta u_t = \alpha_1 u + \alpha_2 u^3 + \dots + \alpha_n u^{2n-1}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Это уравнение моделирует динамику выпучивания двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Здесь функция $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}$ характеризует отклонение балки от вертикали. Параметр $\lambda \in \mathbf{R}_+$ характеризует нагрузку, а параметры $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ свойства материала балки.

Для уравнения (1) рассмотрим начально-краевую задачу Коши с однородными граничными условиями Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega; \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}. \tag{2}$$

Нашей целью является исследование устойчивости нулевого решения задачи (1)–(2). Обобщенное уравнение Хоффа (при $n > 3$) было рассмотрено в [2], но не в контексте устойчивости. Для случая, когда $n = 3$ устойчивость уравнения (1) была исследована в [3]. В данной работе мы обобщим результаты [3], т. е. рассмотрим случай, когда $n > 3$.

Наш подход заключается в том, что сперва мы редуцируем задачу (1)–(2) к задаче Коши

$$u(0) = u_0$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа

$$Lu = M\dot{u} + N(u),$$

где операторы

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega ((\lambda - \lambda_0)uv - \nabla u \nabla v)\, dx, \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

$$\langle Mu, v\rangle = \alpha_1 \int_\Omega uv dx, \quad \forall u, v \in L_{2n}(\Omega),$$

$$\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega (\alpha_2 u^3 + \dots + \alpha_{n-1}u^{2n-3} + \alpha_n u^{2n-1})v dx \quad \forall u, v \in L_{2n}(\Omega).$$

Затем мы применим метод функций Ляпунова, модифицированный для случая неполных нормированных пространств. В результате получена следующая теорема

Теорема. *Нулевое решение задачи* (1)–(2) *асимптотически устойчиво для любых* $\alpha_j \in \mathbf{R}_+, \lambda \in [0, \lambda_0]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hoff N. J.* Creep buckling. — Aeron. Quarterly, 1956, v. 7, №1, p. 1–20.
2. *Баязитова А. А.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Хоффа. — Вестник Магнитогорского гос. ун-та. Сер. Матем. Магнитогорск: МаГУ, 2010, в. 12, с. 15–21.
3. *Загребина С. А.*, *Пивоварова П. О.* Устойчивость и неустойчивость решений уравнений Хоффа. Численный эксперимент. — В сб.: Неклассические уравнения математической физики./ Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск, 2010, с. 88–94.