ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

М. Р. Гаврилович (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Об одном семействе игр против Природы.**

Пусть $C = C_{N,K}$ — переопределенная не имеющая решения система из K линейных уравнений от N неизвестных, $K \gg N$. Мы ограничиваемся рассмотрением семейства систем уравнений вида

$$\begin{cases} x_i + x_j + x_k = a_{i,j,k} \pmod 2, \\ 1 \leqslant i < j < k \leqslant N, \end{cases} \tag{$*$}$$

в которых переменные принимают значения 0 и 1, в каждое уравнение входит не более трех переменных, т. е. $a_{i,j,k}$ равны 0 или 1. Число уравнений K в системе вида $(*)$ удовлетворяет неравенству

$$K \leqslant 2\,\frac{N(N-1)(N-2)}{6}.$$

Семейство систем вида $(*)$ рассматривалось в работе [1].

Рассмотрим семейство $\{\Gamma(C_{N,K})\}$ игр с нулевой суммой одного Игрока с Природой, связанных со следующей вычислительной задачей: *найти максимальное число $M = M(C_{N,K})$ одновременно удовлетворяемых уравнений системы $C = C_{N,K}$ вида $(*)$ и значения переменных, при которых достигается этот максимум.*

Чистая стратегия Игрока в игре $\Gamma(C_{N,K})$ — назвать значения переменных $x_1, \ldots, x_N$. Число таких стратегий равно 2^N. Стратегия Природы — с равной вероятностью указать одно из целых чисел от 1 до K.

Функция выигрыша Игрока равна $+1$, если при подстановке названных Игроком значений переменных в систему $C_{N,K}$ справедливо уравнение с номером, названным Природой, и равна -1 в противном случае.

Игрок может рандомизировать свои чистые стратегии.

Лемма 1. *Игрок имеет чистую оптимальную стратегию $\mathbf{x}^*(C_{N,K}) = \mathbf{x}^*(x_1^*, \ldots, x_N^*)$ — назвать значения переменных, при которых удовлетворяется $M(C_{N,K})$ уравнений (максимальное число). Выигрыш Игрока при применении этой стратегии равен $M(C_{N,K})/K \geqslant 1/2$.*

Задача нахождения стратегии $\mathbf{x}^*$ NP-трудна, т. е. любая задача из класса NP сводится к ней за полиномиальное время.

Будем говорить, что система уравнений $C_{N,K}$ вида $(*)$ вырождена, если у любого уравнения есть противоположное — уравнение с той же левой частью и противоположной правой частью. Будем говорить, что игра $\Gamma(C_{N,K})$ вырождена, если вырождена система уравнений $C_{N,K}$.

Лемма 2. *Смешанная стратегия Игрока, в которой он равновероятно (с вероятностью $1/2^N$) использует все чистые стратегии, дает ему выигрыш $1/2$. Эта стратегия оптимальна тогда и только тогда, когда игра $\Gamma(C_{N,K})$ вырождена.*

Таким образом, вообще говоря, оптимальная стратегия Игрока не единственна.

Из Леммы 2 следует, что если игра $\Gamma(C_{N,K})$ невырождена, то выигрыш Игрока при применении оптимальной стратегии строго больше $1/2$.

Рассмотрим равномерную вероятностную меру на семействе систем (тем самым, игр) вида $(*)$ из K уравнений (без противоположных). Ниже для семейства игр, соответствующих случайным (в смысле введенной меры) системам вида $(*)$ без противоположных уравнений, мы показываем, что стратегия Игрока, в которой он равновероятно использует все чистые стратегии, «асимптотически» является его ε-оптимальной стратегией.

Теорема. *Фиксируем $\varepsilon > 0$. Если игра $\Gamma(C_{N,K})$ соответствует случайной системе уравнений вида $(*)$ без противоположных уравнений, то вероятность того, что равновероятный выбор Игроком чистых стратегий является его ε-оптимальной стратегией, стремится к 1 при $N \to \infty$ и $K/N \to \infty$. А именно, эта вероятность превышает*

$$1 - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{K}}e^{N-\varepsilon^2 K}.$$

В работе Хастада [1] показано, что NP-трудна задача аппроксимации числа $M(C_{N,K})$, а именно, NP-трудно ответить на вопрос, выполняется ли неравенство

$$M/K > 1/2 + \varepsilon.$$

Хастад устанавливает, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ NP-трудно найти значения переменных, для которых справедливы $(1/2+\varepsilon)K$ уравнений.

Переформулировка результата Хастада. *Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. NP-трудно найти смешанную стратегию Игрока, дающую ему выигрыш $1/2+\varepsilon$ в игре $\Gamma(C_{N,K})$ для произвольного семейства систем линейных уравнений $C_{N,K}$ вида $(*)$.*

Следствие теоремы и результата Хастада. *Предположим $P \neq NP$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Не существует «эффективно вычислимой» смешанной стратегии Игрока, дающей ему выигрыш $1/2+\varepsilon$ в игре $\Gamma(C_{N,K})$ для произвольного семейства систем линейных уравнений $C_{N,K}$ вида $(*)$.*

Смешанная стратегия «эффективно вычислима», если существует работающий за полиномиальное время алгоритм, реализующий эту смешанную стратегию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results. — In: Proceedings of 29th Annual Symposium on Theory of Computation, El Paso, 1997, p. 1–10.