ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 21 МАТЕМАТИКИ Выпуск 5
2014

**Э. Л. Пресман**, **А. Д. Сластников** (Москва, ЦЭМИ РАН). **О пороговых стратегиях в задаче оптимальной остановки общей регулярной одномерной диффузии.**

Рассматривается регулярная одномерная диффузия $X_t$ $(t \geqslant 0)$, $X_0 = x$, принимающая значения в объединении открытого (или замкнутого, или полуоткрытого) интервала $I = ]l, r[$, $-\infty \leqslant l < r \leqslant \infty$ и поглощающего состояния $e$ (более подробно см. [1, 2]). Задача оптимальной остановки состоит в нахождении «цены игры»

$$V(x) = \sup_{\tau} \mathbf{E}_x g(X_\tau), \tag{1}$$

где sup берется по всем моментам остановки $\tau$, и соответствующего момента $\tau^*{=}\tau^*(x)$, такого что $V(x) = \mathbf{E}_x g(X_{\tau^*})$. Функция $g(x)$ предполагается полунепрерывной снизу.

Рассматриваемая диффузия характеризуется тремя функциями:

1) строго возрастающей непрерывной справа $m(x)$, порождающей такую меру скорости $M(dx)$, что $M(]a, b]) = m(b) - m(a)$;

2) строго возрастающей непрерывной $s(x)$ (шкала), порождающей меру $S(dx)$;

3) неубывающей непрерывной справа $k(x)$, порождающей меру убивания $K(dx)$.

Для общей регулярной диффузии определены моменты $\tau_y$ первого попадания в состояние $y$ и момент $\zeta = \tau_e$ попадания в поглощающее состояние. Регулярность диффузии означает, что $\mathbf{P}_x\{\tau_y < \zeta\} > 0$ для любых $x, y \in \operatorname{int} I$. Если точка $l$ (и/или $r$ ) достижима из какой-то внутренней точки, то она достижима из любой другой и для полного задания диффузии нужно задать значение мер $M$ и $K$ в соответствующей точке. При этом мера $K$ может принимать и бесконечное значение, и в этом случае процесс после попадания в соответствующую точку мгновенно переходит в поглощающее состояние.

Из строгой марковости и непрерывности диффузии следует существование таких непрерывных функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$, $x \in \operatorname{int} I$, что

$$\mathbf{P}_x\{\tau_y < \zeta\} = \frac{h_1(x)}{h_1(y)} \quad \text{при} \quad y > x, \qquad \mathbf{P}_x\{\tau_y < \zeta\} = \frac{h_2(x)}{h_2(y)} \quad \text{при} \quad y < x. \tag{2}$$

Очевидно, $h_1(x) > 0$, и она либо строго возрастает при всех $x \in \operatorname{int} I$, либо существует такая точка $\overline{x} \leqslant r$, что $h_1(x) = h_1(\overline{x})$ при $l < x < \overline{x}$ и $h(x)$ строго возрастает при $\overline{x} < x < r$. Аналогично, $h_2(x) > 0$ и либо строго убывает при всех $x \in \operatorname{int} I$, либо существует такая точка $\widehat{x} > l$, что $h_2(x) = h_2(\widehat{x})$ при $\widehat{x} < x < r$ и $h_2(x)$ строго убывает при $l < x < \widehat{x}$. Если $\overline{x} > \widehat{x}$, то $h_1(x) = h_2(x) \equiv 1$, при этом в задаче оптимальной остановки (1) решением является момент первого попадания в точку, где функция $g(x)$ достигает своего максимума. Далее будет предполагаться, что $\overline{x} \leqslant \widehat{x}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{G}$, состоящее из таких функций $f$, что при всех $x \in \operatorname{int} I$ предел

$$\frac{d^+ f}{dS}(x) = \lim_{v \downarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x)}{s(x+v) - s(x)}$$

существует и является функцией ограниченной вариации на любом интервале $[a, b[$, $l < a < b < r$. Функция $\frac{d^+ f}{dS}(x)$ непрерывна справа.

Если мера $K(dx)$ не является абсолютно непрерывной по отношению к $M(dx)$, то существует такая мера $N(dx)$, сингулярная относительно меры $M(dx)$, что

$$K(dx) = \frac{dK}{dM}(x) M(dx) + N(dx), \tag{3}$$

где $\frac{dK}{dM}(x)$ обозначает производную Радона–Никодима меры $K(dx)$ по мере $M(dx)$.

Если $f \in \mathcal{G}$, то у знакопеременной меры, соответствующей функции ограниченной вариации $\frac{d^+ f}{dS}(x)$, существуют производные Радона–Никодима $\frac{d}{dM}\frac{d^+ f}{dS}(x)$ и $\frac{d}{dN}\frac{d^+ f}{dS}(x)$ по мерам $M(dx)$ и $N(dx)$ соответственно. Поэтому имеет место представление

$$\begin{aligned} &\frac{d^+ f}{dS}(x) - \frac{d^+ f}{dS}(a) - \int_{]a,x[} f(v) K(dv) \\ &\quad = [L_1 f(x-) - L_1 f(a)] + [L_2 f(x-) - L_2 f(a)] + [L_3 f(x-) - L_3 f(a+)], \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$L_1 f(x-) - L_1 f(a) = \int\limits_{]a,x[} \left( \frac{d}{dM} \frac{d^+ f}{dS}(v) - \frac{dK}{dM}(v) f(v) \right) M(dv) \tag{5}$$

$$L_2 f(x-) - L_2 f(a) = \int\limits_{]a,x[} \left( \frac{d}{dN} \frac{d^+ f}{dS}(v) - f(v) \right) N(dv), \tag{6}$$

а $L_3 f(x)$ является такой непрерывной справа функцией ограниченной вариации, что соответствующая ей знакопеременная мера сингулярна по отношению к мерам $M(dx)$ и $K(dx)$.

Введем обозначения: $\mathcal{G}^+ = \{f \in \mathcal{G} :$ функции $L_1 f,\ L_2 f,\ L_3 f$ не убывают$\}$; $\mathcal{G}^- = \{f \in \mathcal{G} :$ функции $L_1 f,\ L_2 f,\ L_3 f$ не возрастают$\}$; $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}^+ \cap \mathcal{G}^- = \{f \in \mathcal{G} : L_1 f(x) \equiv L_2 f(x) \equiv L_3 f(x) \equiv 0\}$.

Всякая функция из $\mathcal{G}$ имеет единственное минимальное представление в виде разности двух функций из $\mathcal{G}^+$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ принадлежат $\mathcal{G}^0$, линейно независимы, и любая функция из $\mathcal{G}^0$ является линейной комбинацией $h_1(x)$ и $h_2(x)$.

2. Функция $f$ является эксцессивной (для процесса $X_t$) тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{G}^-$. Если точка $l$ (и/или $r$) достижима, то в этой точке (точках) накладываются дополнительные условия.

3. Цена игры $V(x)$ в задаче (1) является минимальной (по функциям из $\mathcal{G}^-$) мажорантой функции $g(x)$.

Напомним, что областью остановки в задаче (1) называется множество $\{x : V(x){=}g(x)\}$. Ниже приводятся необходимые и достаточные условия для пороговой структуры области остановки.

**Теорема**. *Область остановки в задаче* (1) *является интервалом вида* $[x^*, r[$, *где* $l < x^* < r$, *тогда и только тогда, когда*:

а) *функция* $g(x)$ *является эксцессивной для процесса* $X_t$, *начинающегося в точке* $x \in ]x^*, r[$ *и поглощающегося при достижении точки* $x^*$;

б) $g(x) < g(x^*)h_1(x)/h_1(x^*)$ при $l < x < x^*$;

в) *либо* $g(x) = g(x^*)h_1(x)/h_1(x^*)$ *при* $x^*\leqslant x<r$, *либо существует такое* $x_1$, $x^*\leqslant x_1 < r$, *что* $g(x) = g(x^*)h_1(x)/h_1(x^*)$ *при* $x^*\leqslant x\leqslant x_1$ *и* $g(x) < g(x^*)h_1(x)/h_1(x^*)$ *при* $x_1<x<l$ .

Различные варианты условий, при которых решение задачи оптимальной остановки носит пороговый характер, рассматривались для менее общих диффузионных процессов в [3–10].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00784) и РГНФ (проект 14-02-00036).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ито К.*, *Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
2. *Бородин А. Н.*, *Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. СПб: Лань, 2000.
3. *Аркин В. И.* Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки одномерных диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 2, с. 365–374.
4. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Вариационный подход к задачам оптимальной остановки диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 516–533.
5. *Аркин В. И.*, *Сластников А. Д.* Пороговые правила остановки диффузионных процессов и задача Стефана. — Докл. Академии наук, 2012, т. 446, №3, с. 247–250.
6. *Crocce F.*, *Mordecki E.* Explicit solutions in one-sided optimal stopping problems for one-dimensional diffusions. — Stochastics, 2014, v. 86, №3, p. 491–509.
7. *Dayanik S.*, *Karatzas I.* On the Optimal Stopping Problem for One-Dimensional Diffusions. — Stochastic Process. Appl., 2003, v. 107, p. 173–212.
8. *Presman E.* Solution of the optimal stopping problem for one-dimensional diffusion based on a modification of the payoff function. — In: Prokhorov and Contemporary Probability Theory. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2013, v. 33, p. 371–403.
9. *Presman E.* Solution of optimal stopping problem based on a modification of payoff function. — In: Inspired by Finance. The Musiela Festshrift./ Ed. by Yu. Kabanov, M. Rutkowski, Th. Zariphopoulou. Berlin etc.: Springer, 2014, p. 505–518.
10. *Villeneuve S.* On the threshold strategies and smooth-fit principle for optimal stopping problems. — J. Appl. Probab., 2007, v. 44, №1, p. 181–198.