ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2015

А. Н. Тырсин, С. М. Серебрянский (Челябинск, ЮУрГУ; Троицк, ТФ ЧелГУ). **Об одном методе распознавания монотонных зависимостей.**

Пусть имеем дискретный процесс $y_k = y(t_k) = y(k\Delta)$, где Δ — интервал дискретизации, который часто называют временным рядом.

Теорема. *Пусть задана числовая последовательность* $\{f(k)\}$, *где* $f(k)$ *— некоторая непрерывная монотонная функция. Зададим произвольное множество последовательностей* $W = \{f_j(k)\}$, $f_j(k)$ *— непрерывная монотонная функция,* $j \in \Omega$, Ω *— множество индексов. Тогда множество* W *упорядочено по отношению порядка в смысле близости* $\{f_j(k)\}$ *к* $\{f(k)\}$.

Доказательство. Пусть $\{u_k\}$ — некоторая числовая последовательность. Поставим ей в соответствие вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ коэффициентов разностной схемы с помощью отображения $G(\{u_k\}):\ \{u_k\} \to \mathbf{a}$ как

$$\mathbf{a} = \arg\min_{a_i \in \mathbf{R}} \left[\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{k=3}^{\infty} (u_k - a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2})^2\right]. \qquad (1)$$

Из определения обратного отображения следует $\{f^{-1}[f(k)]\} = \{k\}$, где f^{-1} — отображение, обратное к f. Последовательности $\{k\}$ согласно (1) будет соответствовать вектор $\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*) = (2; -1)$ [1]. Таким образом, $\{k\} \xrightarrow{G(\{k\})} \mathbf{a}^*$.

Очевидно, что для каждой функции f_j существует последовательность $\{u_k^j\}$, элементы которой $u_k^j = f_j^{-1}[f(k)]$, где f_j^{-1} — отображение, обратное к f_j. Если $f_j \ne f$, то $\{u_k^j\} \xrightarrow{G(\{u_k^j\})} (a_1^j, a_2^j) = \mathbf{a}^j \ne \mathbf{a}^*$.

Поставим в соответствие каждой последовательности $\{f_j(k)\}$ функционал $d_j(\{f(k)\}) = \sqrt{(\mathbf{a}^j, \mathbf{a}^*)}$. Из непрерывности отображения (1) [2] вытекает упорядоченность множества W по отношению порядка: если $d_j(\{f(k)\}) \le d_l(\{f(k)\})$, то $\{f_j(k)\} \preceq \{f_l(k)\}$.

Метод распознавания состоит в следующем. Для последовательности $\{y_k\}$ задают множество типовых моделей в виде функций f_j, $j \in \Omega$. Параметры этих функций можно задавать или оценивать с помощью аппроксимации, например, методом наименьших квадратов. В результате получает множество W последовательностей $\{f_j(k)\}$. Поскольку W конечно, то наилучшей моделью в W будет та, которая обеспечит минимум $d_j(\{y_k\}) \to \min_{j\in\Omega}$.

Отметим, что, разбив каждую последовательность $\{f_j(k)\}$ на участки монотонности, можно распознавать в общем случае и немонотонные зависимости.

Далее обобщим метод на случай многомерных зависимостей. Рассмотрим, например, двумерные дискретные монотонные зависимости $y(x_i^{(1)}, x_k^{(2)}) = y(i\Delta_1, k\Delta_2) = y(i,k)$, где $\forall i,k\ y(i,k) < (>)\ y(i+1,k)$, $y(i,k) < (>)\ y(i,k+1)$. Нетрудно обобщить рассмотренную выше теорему на этот случай (а также случай любого числа переменных).

Зададим некоторое множество двумерных последовательностей $W = \{f_j(i,k)\}$, $j \in \Omega$, Ω — множество индексов. Тогда множество W упорядочено по отношению порядка в смысле близости $\{f_j(i,k)\}$ к $\{f(i,k)\}$.

Очевидно, что $\{u(i,k)\} = \{f^{-1}[f(i,k)]\} = \{(i,k)\}$. Это означает, что $\forall i,k$ справедливы разностные схемы

$$\begin{cases} u(i,k) = 2u(i,k-1) - u(i,k-2), \\ u(i,k) = 2u(i-1,k) - u(i-2,k), \end{cases} \tag{2}$$

т. е. в любом сечении плоскости (при фиксированном i или k) имеем прямую. Если $\{f_j(i,k)\} \neq \{f(i,k)\}$, то для соответствующей последовательности $\{u_j(i,k)\} = \{f_j^{-1}[f(i,k)]\}$ равенства (2) не будут выполняться.

Параметры каждой зависимости $f_j(i,k)$ задаем или оцениваем по множеству экспериментальных данных $y(i,k)$, $i = 1,\ldots,n_1$, $k = 1,\ldots,n_2$. Для каждой из полученных последовательностей $\{u_j(i,k)\}$ находим аналогично (1) оценки коэффициентов разностной схемы, решая задачу минимизации

$$\sum_i \sum_k \Big[u_j(i,k) - a_1^j u_j(i,k-1) - a_2^j u_j(i,k-2)\Big]^2 \to \min_{a_1^j, a_2^j}$$

или

$$\sum_k \sum_i \Big[u_j(i,k) - a_1^j u_j(i-1,k) - a_2^j u_j(i-2,k)\Big]^2 \to \min_{a_1^j, a_2^j}.$$

Далее, также как и для одномерного случая, сравниваем полученные векторы (a_1^j, a_2^j), $j \in \Omega$ на близость к эталонному вектору $\mathbf{a}^* = (2;-1)$.

Рассмотренный выше метод распознавания зависимостей, в отличие от метода основе разностных схем [1, 3], не ограничен набором функций, для которых можно аналитически построить линейную или нелинейную разностную схему. Кроме того, предложенный метод позволяет распознавать многомерные зависимости.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-18-00574).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тырсин А. Н.* Идентификация зависимостей на основе моделей авторегрессии. — Автометрия, 2005, т. 41, № 1, с. 43–49.
2. *Тырсин А. Н.* Модель авторегрессии как отображение функциональной зависимости временного ряда. — Системы управления и информационные технологии, 2005, № 1(18), с. 27–29.
3. *Тырсин А. Н.*, *Серебрянский С. М.* Распознавание зависимостей во временных рядах на основе структурных разностных схем. — Автометрия, 2015, т. 51, № 2, с. 54–60.