ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2015

Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин (Москва, ЦЭМИ РАН, ВЦ РАН)**. О вероятности разорения в модели страхования со случайными премиями и инвестированием капитала в безрисковый актив.**

Рассматривается модель коллективного риска, в которой динамика капитала X_t страховой компании описывается уравнением

$$X_t = u + \int_0^t rX_s ds + C_t - S_t, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь u — начальный капитал, S_t — процесс агрегированных страховых выплат, C_t — процесс агрегированных премий (также случайный), причем эти два процесса независимы; число $r > 0$ определяет величину процентной ставки. Предполагается, что S_t — составной пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ и функцией $F(z)$ распределения скачков, определяющих размеры выплат, $F(0) = 0$; процесс C_t также предполагается составным пуассоновским с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ и функцией $G(y)$ распределения скачков, определяющих размеры премий, $G(0) = 0$. При данных предположениях и при $r = 0$ соотношение (1) описывает динамику капитала в так называемой модели со случайными (стохастическими) премиями (см., например, [1, 2]); при $r > 0$ уравнение (1) описывает динамику капитала при условии, что он постоянно держится на банковском счете.

Обозначим $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$ — момент разорения; тогда $\psi(u) = \mathbf{P}\,(\tau < \infty)$ — вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени, а $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ — вероятность неразорения (ВНР). Здесь приводятся результаты полного исследования ВНР в случае экспоненциальных распределений требований и премий, т. е. когда $F(x) = 1 - \exp(-x/m)$, $G(y) = 1 - \exp(-y/n)$, $m, n > 0$, $x, y \geqslant 0$. Оказывается, что ВНР является решением следующей сингулярной нелокальной задачи для интегродифференциального уравнения (ИДУ) первого порядка:

$$ru\varphi'(u) - \lambda\,[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1\,[\varphi(u) - (I_n\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda+\lambda_1)}\int_0^\infty \varphi(s)\exp(-s/n)\,ds\,, \tag{3}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1; \tag{4}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1 \qquad \forall u \in \mathbf{R}_+, \tag{5}$$

где $(J_m\varphi)(u)$ и $(I_n\varphi)(u)$ — вольтерров и невольтерров интегральные операторы, соответственно ($u \in \mathbf{R}_+$; $J_m, I_n : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$):

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(u-x)\exp(-x/m)\,dx, \tag{6}$$

$$(I_n\varphi)(u) = \frac{1}{n}\int_0^\infty \varphi(u+y)\exp(-y/n)\,dy. \tag{7}$$

Здесь C_0 — параметр, значение которого подлежит определению, $0 < C_0 < 1$.

Прежде чем привести утверждения, касающиеся существования и единственности решения данной задачи, его связи с ВНР в рассматриваемой модели, а также его асимптотических представлений и свойств, кратко опишем предварительные (нестрогие) соображения, позволяющие априорно сформулировать данную сингулярную задачу как задачу поиска указанной вероятности.

При условии дифференцируемости ВНР (как функции начального капитала u) использование понятия инфинитезимального оператора однородного марковского процесса (1), наряду с формулой полной вероятности, позволяет выписать ИДУ (2). Ограничение (5) диктуется самой природой вероятности; учитывая ограниченность в нуле функции $\varphi(u)$, получаем $\lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = 0$ и выполнение предельного нелокального условия (3), обеспечивающего вырождение ИДУ (2) при $u \to +0$. Наконец, интуитивно понятное предельное условие (4), выделяющее нетривиальное решение из множества решений линейного ИДУ (2), в соответствии с принципом достаточности [3] находится в ряду условий, при выполнении которых решение сингулярной задачи (2)–(5), если оно существует, действительно определяет ВНР в исходной модели.

Задача (2)–(5) соответствует «вырожденному случаю» по отношению к более общей модели, когда некоторая фиксированная доля капитала вкладывается в рисковые активы, моделируемые геометрическим броуновским движением, и лишь оставшаяся доля (возможно, нулевая) держится на банковском счете. Такая модель приводит к более сложной сингулярной нелокальной задаче для ИДУ, которая полностью изучена нами в [4], а «вырожденная задача» (2)–(5) получается из нее предельным переходом по параметру волатильности акций, когда последний стремится к нулю. Такой переход является сингулярным — понижается порядок ИДУ и меняется поведение решений при малых и больших $u > 0$, и возникающая при этом задача (2)–(5) требует отдельного изучения.

Упрощающим обстоятельством для моделей с экспоненциальными распределениями является тот факт, что исходные задачи для ИДУ сводятся к эквивалентным задачам для ОДУ более высоких порядков (см., например, [4]).

Теорема. *Пусть в ИДУ* (2), *где* J_m *и* I_n *определены в* (6), (7), *все параметры* r, n, m, λ *и* λ_1 *— фиксированные положительные числа. Тогда*:

1) *решение* $\varphi(u)$ *сингулярной нелокальной задачи* (2)–(5) *существует и единственно*;

2) *указанное решение определяет вероятность неразорения для процесса* (1) *и является неубывающей на* $\mathbf{R}_+$ *функцией*;

3) *при малых* $u > 0$ *справедливо*: *если выполнено неравенство* $r \geqslant \lambda + \lambda_1$, *то производная* $\varphi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией*; *если выполнено условие* $0 < r < \lambda+\lambda_1$, *то производная* $\varphi'(u)$ *имеет положительный конечный предел при* $u \to +0$, *причем при выполнении дополнительного требования* $\lambda + \lambda_1 \leqslant 2r$ *вторая производная* $\varphi''(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией, а при выполнении неравенства* $\lambda+\lambda_1 > 2r$ *вторая производная* $\varphi''(u)$ *также имеет конечный предел при* $u \to +0$, *причем справедливо соотношение* $\lim_{u\to+0} \varphi''(u) = -\lim_{u\to+0} \varphi'(u)\, i_{\mathrm{r,II}}/[mn(\lambda+\lambda_1-2r)]$, *где* $i_{\mathrm{r,II}} = r(m-n)+\lambda_1 n-\lambda m$;

4) *при больших* u *решение* $\varphi(u)$ *представимо в виде*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{\lambda/r-1} \exp(-u/m)\, [1 + o(1)], \tag{8}$$

где $0 < K$ *— постоянная* (*значение постоянной* K, *вообще говоря, не может быть найдено методами локального анализа*);

5) *если* $i_{\mathrm{r,II}} \geqslant 0$, *то решение* $\varphi(u)$ *— вогнутая на* $\mathbf{R}_+$ *функция, а при* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$ *и* $\lambda + \lambda_1 > 2r$ *функция* $\varphi(u)$ *выпукла на некотором отрезке* $[0, \widehat{u}]$, *где* $0 < \widehat{u}$ *— точка перегиба.*

Что касается поведения на бесконечности, то для вероятности разорения $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$ в этой модели ранее была получена только менее точная верхняя оценка в

[5]. Представление вида (8) для ВНР имеет место и в классической модели Крамера–Лундберга с инвестициями в безрисковый актив (см. [6], [7]), а также при оптимальном управлении инвестициями в этой модели, см. [8].

Работа Т. А. Белкиной поддержана РФФИ (код проекта 13-01-00784-а) и Международной лабораторией количественных финансов НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ, договор 14.А12.31.0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойков А. В.* Модель Краме́ра–Лундберга со стохастическими премиями. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 549–553.
2. *Королев В. Ю.*, *Бенинг В. Е.*, *Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2011, 620 с.
3. *Belkina T. A.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. — Markov Processes and Related Fields, 2014, v. 20, p. 505–525.
4. *Белкина Т. А.*, *Конюхова Н. Б.*, *Курочкин С. В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т. 52, № 10, с. 1812–1846.
5. *Бойков А. В.* Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения. — Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук, МИ РАН, 2003, 83 с.
6. *Paulsen J.*, *Gjessing H. K.* Ruin theory with stochastic return on investments. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29 (4), p. 965–985.
7. *Belkina T.*, *Konyukhova N.*, *Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models. — Differential and Difference Equations with Applications/Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013, v. 47, p. 27–44.
8. *Белкина Т. А.*, *Конюхова Н. Б.*, *Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 3–24.