ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

В. В. Ильичева (Ростов-на-Дону, ФГБОУ ВПО РГУПС). **Модель сбалансированного роста с убывающим фактором.**

В известной модели сбалансированного роста:

$$\dot{K} = sF(K,L) - \mu K, \tag{1}$$

где s — норма накопления, μ — коэффициент амортизации, $F(K,L)$ — некоторая производственная функция, K и L — затраты основных фондов и трудовых ресурсов соответственно, соблюдается выполнение закона о постоянном темпе роста выпуска и ресурсов. Это предположение дает возможность проводить математический анализ, доказывающий магистральные теоремы и позволяющий решать оптимизационные задачи при стабильном экономическом развитии. Фактор трудовых ресурсов в модели динамики (1) возрастает экспоненциально, в пропорции к росту населения страны. Однако в реальных экономических системах изменение объема трудовых ресурсов может носить убывающий характер. Это наблюдается, например, в отрасли железнодорожного транспорта, где происходит ежегодное сокращение численности работающих. В данной работе приводится решение уравнения модели с учетом убывающей тенденции фактора L и использования в качестве производственной функции квазиоднородной функции Кобба–Дугласа. Вид уравнения (1) тогда:

$$\dot{K} = sK^{\alpha}L^{m-l\alpha} - \mu K,$$

где коэффициент α, отдача на масштаб m, вес l — параметры, определяемые в результате анализа статистической информации. Введем величину $u = \frac{K}{L^l}$ и назовем ее обобщенной фондовооруженностью. Рассматривая время как $t = z_n t_p$, где $z_n = \frac{Y_n}{K_n}$ — фондоотдача, t_p — обозначение «размерного» времени, и труд как $\frac{L_p}{L_n} = L$, после ряда выкладок получим уравнение Бернулли:

$$\dot{u} = s\,L^{m-l}(t)\,u^{\alpha}(t) - \Big(\mu + l\,\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\Big)u\,. \tag{2}$$

При этом величина $\eta(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ характеризует темп изменения фактора труда. Так как, несмотря на убывание ресурса L, выпуск системы возрастает, рост происходит за счет технологий, повышающих производительность труда. Поэтому в модели надо учесть экзогенный научно-технический прогресс, используя множитель $e^{\beta t}$:

$$\dot{u} = s\,e^{\beta t}\,L^{m-l}(t)\,u^{\alpha}(t) - \Big(\mu + l\,\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\Big)u\,, \quad u(0) = u_0\,.$$

Пусть при $\eta_p < 0$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$ (в случае, близком к начальному моменту «сокращения штатов») имеет место неравенство:

$$\lambda = \frac{\mu_p + l\eta_p}{z_n} > 0.$$

Тогда $\dot{L}_p = \eta_p L_p (L_n - L_p)$, $L_p(0) = L_{p0}$.

При $\dot{L}(t) < 0$ — убывании фактора труда в отрасли — можно записать $L(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} L_d = \mathrm{const}$.

Представив уравнение (2) в виде

$$\dot{u} = a(t)\, u^{\alpha} - b(t)\, u, \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

и выполнив замену $\dot{\nu}(t) = u^{1-\alpha}$, получим линейное неоднородное уравнение 1-го порядка. Найдем его решение и перейдем к функции u :

$$u(t) = \frac{L^l(0)}{L^l(t)}\, e^{-\mu t} \left(u_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t s\, e^{\beta\tau}\, L^{m-l}(\tau)\, e^{(1-\alpha)\mu\tau}\, \frac{L^{(1-\alpha)l}(\tau)}{L_0^{(1-\alpha)l}} d\tau \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Таким образом, найдено аналитическое решение уравнения (2) модели для произвольно изменяющегося фактора L.