

А. Н. Бестужева, М. М. Кухарчук, В. В. Лобынцев
 (Санкт-Петербург, ЗАО «НПФ «АРГОС»»). **Распространение загрязняющего вещества в желобе.**

Морское дно представляет собой сложную поверхность, состоящую из хребтов, разломов, равнин и желобов. Рельеф дна необходимо учитывать, как важный фактор, влияющий на масштабы загрязнения придонной водной среды затонувшими потенциально опасными объектами. В настоящем докладе рассмотрена двумерная краевая задача для уравнения диффузии в случае специального вида геометрии задачи.

Считается, что жидкость идеальная и несжимаемая, отсутствуют внутренние течения, нет источников и стоков. Пусть в начальный момент времени диффундирующее вещество с плотностью, больше чем плотность воды, заполняет бесконечный в длину желоб на дне водоема. Желоб представляет собой в сечении бесконечный (в высоту) треугольник с идеальными стенками с углом раствора 2α (см. рис.).

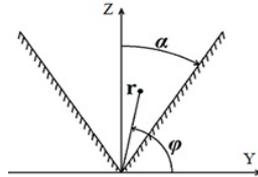


Рис. Желоб

Постановка задачи: искомая функция концентрации диффундирующего вещества $c(x, y, z)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}.$$

Начальные условия:

$$c = \begin{cases} c_0, & \sqrt{y^2 + z^2} \leq l^2 \\ 0, & \sqrt{y^2 + z^2} \geq l^2 \end{cases}.$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \vec{n}} \right|_{\varphi=\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha} = 0, \quad c|_{r \rightarrow 0} < \infty, \quad c|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Здесь K_y, K_z — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии, c_0 — начальное распределение концентрации диффундирующего вещества.

После проведения операций масштабирования, обезразмеривания и перехода к полярной системе координат получим следующую постановку задачи:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2}. \quad (1)$$

Начальные условия:

$$c(r, \varphi, 0) = \begin{cases} 1, & (r, \varphi) \in D, \\ 0, & (r, \varphi) \notin D, \end{cases} \quad D = \left\{ r, \varphi \mid 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \alpha \right\}. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2} \pm \alpha} = 0, \quad c|_{r \rightarrow 0} < \infty, \quad c|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Используя метод Фурье, уравнение (1) сводим к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, вводя два волновых числа λ и μ .

Общее решение (1) с учетом граничных условий (3) будет иметь следующий вид:

$$c(r, \varphi, t) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} \int_0^\infty A_{\mu\lambda} \cdot J_\mu(\lambda r) \frac{\cos \mu(\pi/2 - \varphi - \alpha)}{\cos \mu(\pi/2 - \alpha)} d\mu d\lambda.$$

Произвольную константу $A_{\mu\lambda}$ определяем из начального условия (2):

$$c(r, \varphi, 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty A_{\mu\lambda} \cdot J_\mu(\lambda r) \frac{\cos \mu(\pi/2 - \varphi - \alpha)}{\cos \mu(\pi/2 - \alpha)} d\mu d\lambda. \quad (4)$$

Единицу, стоящую в левой части (4), с учетом начального условия (2), разложим сначала в интеграл Фурье по φ , а затем полученную подынтегральную функцию по функциям Бесселя. Тогда приходим к выражению для коэффициента $A_{\mu\lambda}$:

$$A_{\mu\lambda} = -\frac{2}{\pi\mu} \cos(\mu\alpha) \cdot \sin \mu(\pi - 2\alpha) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\mu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1 + \mu + k) \cdot \Gamma(1 + \mu + k) k!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}.$$

При $\alpha \rightarrow \pi/2$ результаты исследования согласуются с [1].

Проведенное численное моделирование подтверждает правильность полученных результатов.

Решение представленной в докладе задачи является основой для постановки обратных оптимизационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bestuzheva A. N., Smirnov A. L.* Propagation dynamics of a diffusing substance on the surface and in the bulk of water. — Vestnik St. Petersburg Univ. Math., 2015, v. 48, is. 4, p. 262-270. [https://doi.org/10.3103.S1063454115040044](https://doi.org/10.3103/S1063454115040044).