О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й   И   П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 25   М А Т Е М А Т И К И   В ы п у с к 2
2018

Е. В. К у т ы р е в а (Москва, лаб. ТВП)**. Об одном свойстве треугольника Паскаля над произвольным конечным полем.**

Рассмотрим аналог T_s треугольника Паскаля, состоящий из s строк элементов произвольного конечного поля $GF(q)$, $q = p^l$. В этом треугольнике элементы i-й строки $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_i^{(i)}$, $i = \overline{1, s-1}$, получаются из элементов $(i+1)$-й строки $x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \ldots, x_{i+1}^{(i+1)}$ по следующему правилу: $x_j^{(i)} = bx_j^{(i+1)} + dx_{j+1}^{(i+1)}$, $j = \overline{1, i}$, $+$ означает операцию сложения в поле $GF(q)$, а $b, d \in GF(q)^*$.

Через s_0 обозначим размер максимального нулевого треугольника T_{s_0}, содержащегося в треугольнике T_s. Рассмотрим трапецию D, состоящую из строк треугольника T_s, не принадлежащих треугольнику T_{s_0}. Число строк этой трапеции обозначим через R. Строку трапеции D, состоящую из $s_0 + i$ элементов будем считать $(i-1)$-й строкой трапеции.

Разобъем строки трапеции D на $\lceil \log_p R \rceil + 1$ групп по $(p-1)p^{j-1}$ строк, где j — номер группы, $j \in \overline{1, \lceil \log_p R \rceil}$. Группа с номером 0 состоит из 0-й строки трапеции D. Обозначим элемент $-bd^{-1}$ через y. Пусть порядок элемента y равен c.

В работах [1, 2] показано, что строки трапеции D периодичны, период строки трапеции D из группы с номером j равен cp^j, $j \in \overline{0, \lceil \log_p r \rceil}$.

Пусть $x_0^{(0)} \neq 0$, $x_j^{(0)} = 0$, $j > 0$. Обозначим $\lceil \log_p (j+1) \rceil - 1$ через t, $\lceil \log_p (k+1) \rceil - 1$ через t_1. Представим j (номер строки) и k (номер элемента) в p-ичном виде:

$$j = \sum\nolimits_{m=0}^{t} j_m p^m, \qquad 0 \leqslant j_m < p, \qquad k = \sum\nolimits_{m=0}^{t_1} k_m p^m, \qquad 0 \leqslant k_m < p.$$

Тогда $x_k^{(j)} = 0$ выполняется в том и только том случае, если $k_m < j_m$ для некоторого $m \in \{0, \ldots, t\}$. Пусть l_m, $m = \overline{1, p-1}$, — число цифр m в p-ичной записи числа j, $l = \sum_1^{p-1} l_m$. Подсчитаем число ненулевых элементов на периоде j-й строки. Оно равно числу вариантов p-ичной записи номера элемента, в которой выполняется $k_m \geqslant j_m$, $m = \overline{0, i-1}$, и составляет $c \cdot p^{i-l} \cdot (p-1)^{l_1} \cdot (p-2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot 2^{l_{p-2}}$. Так как период j-й строки из i-й группы равен cp^i, число нулевых элементов на периоде в точности равно

$$cp^{i-l} \left(p^l - \prod_{m=1}^{p-1} (p-m)^{l_m} \right). \tag{1}$$

В [2] показано, что для любого фиксированного $v \in \mathbb{R}_+$ если число z ненулевых элементов в треугольнике T_s над полем $GF(q)$, удовлетворяет условию $z \leqslant vs$, то существуют зависящее от v число S, монотонная последовательность рациональных чисел $\{v_i\}_{i \geqslant 0}$ и некоторые неотрицательные константы ε_i, $i \geqslant 0$ такие, что для $s > S$ имеем: $M(s, z) = 0$, если $z \notin \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} (v_i s - \varepsilon_i, v_i s + \varepsilon_i)$.

Данный результат для случая $q = 2$ получен в работе [1].

Пусть теперь $x_0^{(0)} \neq 0$, $x_j^{(0)}$, $j > 0$ произвольны. Обозначим через $k(r)$ долю ненулевых элементов на периодах r верхних строк трапеции D. Каждое число v_i является суммой некоторых трех чисел $k(r)$, необязательно различных.

Обозначим через $\{v_i^{(0)}\}_{i\geqslant 0}$ последовательность точек привязки для случая $GF(p)$, p — простое. Из формулы (1) и приведенных выше рассуждений следует справедливость следующей теоремы:

Теорема. *Последовательности* $\{v_i\}_{i\geqslant 0}$ *и* $\{v_i^{(0)}\}_{i\geqslant 0}$ *пересекаются, их пересечением служит некоторая монотонная последовательность рациональных чисел* $\{v_i^{(*)}\}_{i\geqslant 0}$.

REFERENCES

1. *Малышев Ф. М., Кутырева Е. В.* Об одном свойстве булевых аналогов треугольника Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 2, с. 245–246.
2. *Кутырева Е. В.* О числе ненулевых элементов треугольника Паскаля над конечным полем. — Тезисы докладов МГУ, М.: 2005.