ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 25 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2018

М. А. Сагадеева (Челябинск, ЮУрГУ). **О решении нестационарного линеаризованного уравнения Хоффа.**

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Дирихле

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \tag{1}$$

для нестационарного линеаризованного уравнения Хоффа

$$(\lambda - \Delta)\dot{u}(t) = a(t)u(t) + g(t) \tag{2}$$

с условием Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(u(0) - u_0) = 0. \tag{3}$$

Вектор-функция $g : \mathbb{R} \to W_q^l(\Omega)$ характеризует внешнее воздействие на систему ($W_q^l(\Omega)$ — пространства Соболева, $2 \leqslant q < \infty$, $l = 0, 1, \ldots$), а скалярная функция $a : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ характеризует изменение во времени параметров уравнения (2).

Если $\lambda \in \sigma(\Delta)$, то в уравнении (2) левая часть занулится. Такие уравнения относят к неклассическим уравнениям математической физики [1] или уравнениям соболевского типа (см., например, [2–4]). Данное исследование лежит в рамках теории вырожденных полугрупп и групп операторов, которая создана Г. А. Свиридюком [1, 4]. Отметим, что в уравнении (2) присутствует нестационарный параметр $a(t)$ и при построении решений таких нестационарных уравнений мы воспользуется результатами статьи [5] о разрешающих вырожденных потоках операторов.

Обозначим через $\sigma(\Delta)$ спектр однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ. Спектр $\sigma(\Delta)$ отрицателен, дискретен, конечнократен, и сгущается только к $-\infty$. Через $\{\lambda_k\}$ обозначим множество собственных значений, занумерованное по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\psi_k\}$ — семейство соответствующих собственных функций, ортонормированных относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega), \psi_k \in C^\infty$, $k \in \mathbb{N}$.

О п р е д е л е н и е. Вектор-функция $u \in C^1([0,T]; \overset{\circ}{W}{}_q^{l+2}(\Omega))$ называется *классическим решением уравнения* (2) с условием (1), если на $[0,T]$ обращает его в тождество. Классическое решение $u = u(t)$ уравнения (2) называется *классическим решением задачи Шоуолтера–Сидорова* (1)–(3), если оно удовлетворяет (3).

Теорема. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *вектор-функция* $g \in C^1([0,T]; W_q^l(\Omega))$, *функция* $a \in C^1([0,T]; \mathbb{R}_+)$ *и* $\lambda \in \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_q^{l+2}(\Omega)$ *существует единственное классическое решение* $u = u(t)$ *задачи* (1)–(3), *представимое в виде*

$$u(t) = -\sum_{m \in \mathbb{N}: \lambda_m = \lambda} \frac{\langle g(s), \psi_m \rangle \psi_m}{a(t)} + \sum_{k \in \mathbb{N}\backslash\{m:\lambda_m = \lambda\}} e^{\frac{1}{\lambda - \lambda_k} \int\limits_0^t a(\tau)d\tau} \langle u_0, \psi_k \rangle \psi_k$$
$$+ \sum_{k \in \mathbb{N}\backslash\{m:\lambda_m = \lambda\}} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda - \lambda_k} \int\limits_s^t a(\tau)d\tau} \frac{\langle g(s), \psi_k \rangle \psi_k}{\lambda - \lambda_k} ds.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А.*, *Загребина С. А.* Неклассические модели математической физики. — Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 2012, № 40(299), с. 7–18.
2. *Showalter R. E.* The Sobolev type Equations. I (II). — Applicable Analysis, 1975, v. 5, № 1, № 2, p. 15–22, p. 81–99.
3. *Демиденко Г. В.*, *Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998, 438 с.
4. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht–Boston, VSP, 2003, 216 p.
5. *Сагадеева М. А.* Вырожденные потоки разрешающих операторов для нестационарных уравнений соболевского типа. — Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика, 2017, т. 9, № 1, с. 22–30.