

В. Л. К р е п с (Санкт-Петербург, ИПРЭ РАН, НИУ ВШЭ). **О матричных играх с положительными значениями.**

Мы рассматриваем $n \times n$ -матричную игру с квадратной вещественной матрицей выигрышей $A \in R^{n \times n}$. Мы обозначаем эту матричную игру тем же символом A .

Утверждение 1. *Матричная игра A имеет положительное значение, $\text{val } A > 0$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий*

1) $\text{val } A^i > 0$ для некоторого $i = 1, \dots, n$, где A^i — $(n-1) \times n$ -подматрица матрицы A , получающаяся при вычеркивании строки i из матрицы A ;

2) существует A^{-1} и все ее элементы неотрицательны.

Легко видеть, что положительность значения матричной игры A , $\text{val } A > 0$, равносильна отсутствию ненулевых решений у системы линейных неравенств

$$Ay \leq 0, \quad y \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_n)$ — n -мерный вектор-столбец.

В работе Гейла и Никайдо [1] дается достаточное условие отсутствия ненулевых решений у системы (1), состоящее в положительности всех главных миноров матрицы A . Заметим, что отсутствие ненулевых решений у системы (1) равносильно глобальной однозначности (global univalence) отображений в терминах Якобиевой матрицы A производственной функции, см., например, [2].

С помощью Утверждения 1 мы показываем, что для матриц с неположительными элементами вне главной диагонали условие Гейла–Никайдо также является необходимым.

Для симметрической матрицы A положительность главных миноров означает, что соответствующая квадратичная форма, положительно определена, $x^T A x > 0$ для любого $x \in R^n$ (условие Сильвестра).

Утверждение 2. *Для того, чтобы симметрическая $n \times n$ -матричная игра A имела положительное значение достаточно, чтобы матрица A была коположительна, т. е. соответствующая квадратичная форма была положительно определена на $R_+^n = \{x \geq 0, x \neq 0\}$.*

Для симметричной матрицы A , используя Утверждение 2 и критерий копозитивности матрицы A [3], мы получаем достаточное условие положительности значения матричной игры A , сформулированное в терминах главных миноров матрицы A . Наше условие более общее, чем условие Гейла–Никайдо.

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 году и при частичной поддержке РФФИ, проект 16-01-00124-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gale D., Nikaido H. The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings. — Mathematische Annalen, 1965, v. 159, p. 81–93.
2. Nikaido H. Convex structures and economic theory. — New York and London: Academic press, 1968, 416 p.

3. *Кренс В. Л.* О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1984, т. 24, в. 4, с. 497–503.