ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

Л. И. Миронова (Подольск, МГМУ (МАМИ)). **Вариационная задача нахождения локального теплового экстремума в тонких оболочках при заданных условиях нагрева.**

Рассмотрим переходной процесс, при котором действие локального температурного поля на элемент конструкции (ЭК) приводит к его переходу из упругого в упругопластическое состояние. Такое состояние ЭК будем считать экстремальным, а задачу определения уровня критических напряжений можно решать в контексте экстремальной температурной задачи нахождения локального теплового экстремума. Данное рассмотрение вопроса позволяет в дальнейшем минимизировать уровни упругопластических деформаций в зонах технологического влияния в процессе сварки оболочечных конструкций.

Соответствующая вариационная задача формулируется следующим образом. Найти экстремум функционала упругой энергии оболочки на множестве функций перемещений u, v, w и температурных усилия и момента, которые удовлетворяют системе уравнений, условиям закрепления торцевых сечений и некоторым дополнительным условиям связи. Решение задачи будем искать путем составления полной системы уравнений для определения экстремальной температурной нагрузки, включая уравнения термоупругости тонкой оболочки, уравнения Эйлера и дополнительные соотношения согласования неголономных кинематических связей. Сформулированная задача эквивалентна изопериметрической задаче, которая сводится к нахождению абсолютного экстремума функционала [1].

$$K^*[w_0] = \frac{\pi E h R^2}{8\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d^4 w_0}{dz^4}\right)^2 + 4\left(\frac{d^2 w_0}{dz^2}\right)^2 - 2w_0(z) \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} \delta^{(i)}(z - z_j) \right] dz. \quad (1)$$

Здесь K — функционал упругой энергии оболочки; w_0 — множество функций перемещений $w_0 = w_0(z)$; E — модуль упругости; h, R — характерные оболочки; $\delta^{(i)}(z)$ — i-я производная от дельта-функции, принимающая заданные значения $K_{ij}(w_0) = w_{ij}$.

Уравнения Эйлера для функционала (1) дают соотношение

$$\frac{d^8 w_0}{dz^8} + 4\frac{d^4 w_0}{dz^4} = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} \delta^{(i)}(z - z_i).$$

Получено решение, при котором семейство экстремальных температурных полей на координатной образующей цилиндрической поверхности для $n_j = 1$, удовлетворяющих условиям на бесконечности, определяется выражением

$$T_{\max} = T_0 \sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2 \left[\frac{\gamma_{0j}}{3}(x - x_j) + \gamma_{1j}\right] \operatorname{sgn}(x - x_j),$$

$$\operatorname{sgn}(x - x_j) = \left\{ \begin{array}{rl} +1, & \text{если} \quad (x - x_j) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad (x - x_j) = 0, \\ -1, & \text{если} \quad (x - x_j) > 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

где x — линейная координата точки, принадлежащей образующей цилиндрической оболочки вдоль оси z; T_0 — начальная температура рассматриваемого сечения при локальном нагреве [2]

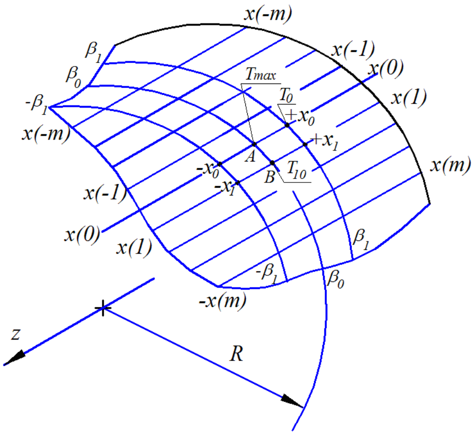

Рис. Случай локального нагрева тонкой оболочки

Выражение (2) определяет профиль температурного поля, характеризующегося координатной зависимостью, где $T_{\max}$ — температура, достигающая своего максимума в экстремальной точке на поверхности в интервале температур от $T_0(\pm x_0)$ до $T_{\max}(-x_0 \leqslant x \leqslant +x_0)$, рис.

Температурные напряжения с учетом (2) определяются из выражения

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{8a} E\alpha_T T_{\max}; \quad a = \left[(1-v^2)\frac{3R^2}{4h^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Такая модель может быть взята за основу в теоретическом исследовании термонапряженных состояний сочлененных оболочечных конструкций в зоне технологического влияния при сварке продольных швов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурак Я. И.*, *Григолюк Э. И.*, *Подстригач Я. С.* О применении методов вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек. — Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 101–109.
2. *Миронова Л. И.* Модельная задача в оценке термонапряженного состояния сварных элементов оболочковых конструкций. — Технология машиностроения, 2014, №6, с. 26–28.