ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

Н. А. Колодий, **Т. И. Колодий** (Волгоград, ВолГУ, НИИГТП). **Методы статистического анализа параметров стохастической модели миграции химических веществ в экосистеме при частичных наблюдениях.**

В данной работе представлены методы статистического анализа неизвестных параметров при частичных наблюдениях решений уравнений модели миграции веществ в экостистеме [2].

Предположим, что имеется K наблюдений экосистемы, находящейся под воздействием химического вещества, одного и того же для всех наблюдений. Параметры модели одинаковы для всех наблюдений и определены, для моментов времени $t \geqslant 0$, следующим образом: $k_a(t)$ — коэффициент, определяющий долю химического вещества, поступающего в приземный слой атмосферы в процессе его применения; $k_{sa}(t)$ — коэффициент интенсивности поступления вещества из почвы в атмосферу; k_{aa} — коэффициент зависимости снижения концентрации химического вещества в атмосфере от его физико-химических свойств: скорости осаждения на поверхность, скорости разложения под воздействием ультрафиолетовой радиации, скорости рассеивания в атмосфере [3]; $k_s(t)$ — коэффициент достижения почвы; $k_{as}(t)$ — скорость попадания вещества из атмосферы в почву; $k_{ss}(t)$ — коэффициент снижения концентрации вещества в почве за счет разложения; $k_{pg}(t)$ и $k_{pc}(t)$ — коэффициенты, определяющие доли загрязняющего вещества поступающие в зеленую массу и в зерно растения во время его применения; $k_{apg}(t)$ и $k_{apc}(t)$ — проникновение вещества из атмосферы в зеленую массу и в зерно растений; $k_{spg}(t)$ — интенсивность проникновения химического вещества из почвы в растение через его корневую систему; $k_{pgc}(t)$ — коэффициент переноса вещества от зеленой массы растения к его зерну; $k_{gg}(t)$ и $k_{cc}(t)$ — скорость разложения вещества в зеленой массе и в зерне растения, соответственно;

Пусть для каждого $k \in \{1, ..., K\}$, известная положительная функция $D_k(t)$ определяет дозу применения химического вещества в рассматриваемой экосистеме в k-м наблюдении. Мы полагаем, что начальное значение дозы вещества известно и одинаково для всех наблюдений. Пусть $C_{a,k}(t)$ — концентрация вещества в приземном слое атмосферы в k-м наблюдении; $C_{s,k}(t)$ — среднее значение концентрации вещества в слое почвы, занятой корневой системой сельскохозяйственной культуры в k-м наблюдении; и $C_{pg,k}(t)$ и $C_{pc,k}(t)$ обозначает концентрацию вещества в зеленой массе и в зерне, соответственно, в k-м наблюдении. Для всех наблюдений начальные значения описанных процессов известны. Тогда, согласно вероятностной модели миграции веществ в экосистеме [2], имеем следующую систему СДУ Ито:

$$
\begin{aligned}
dC_{a,k}(t) &= k_a(t)D_k(t)dt + k_{sa}(t)C_{s,k}(t)dt - k_{aa}C_{a,k}(t)dt + \sigma_1(t)C_{a,k}(t)dw_1(t),\\
dC_{s,k}(t) &= k_s(t)D_k(t)dt + k_{as}(t)C_{s,k}(t)dt - k_{ss}C_{s,k}(t)dt + \sigma_2(t)C_{s,k}(t)dw_2(t),\\
dC_{pg,k}(t) &= k_{pg}(t)D_k(t)dt + k_{apg}(t)C_{a,k}(t)dt + k_{spg}C_{s,k}(t)dt - k_{gg}C_{pg,k}(t)dt +\\
&\quad +\sigma_3(t)C_{pg,k}(t)dw_3(t),\\
dC_{pc,k}(t) &= k_{pc}(t)D_k(t)dt + k_{apc}(t)C_{a,k}(t)dt + k_{pgc}C_{pg,k}(t)dt - k_{cc}C_{pc,k}(t)dt +\\
&\quad +\sigma_4(t)C_{pg,k}(t)dw_4(t),
\end{aligned}
$$

где неотрицательные процессы $C_{a,k}(t)$, $C_{s,k}(t)$, $C_{pg,k}(t)$ и $C_{pc,k}(t)$ — $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}$-согласованны и непрерывны, стандартные $(\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}$-винеровские процессы w_1, w_2, w_3, w_4 — независимы, и определены на некотором вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ (см. [1]).

Предположим, что выполнены следующие условия:

A1) для каждого $k \in \{1, ..., K\}$ известны доза внесенного вещества $D_k(t)$ и концентрация вещества в земле $C_{s,k}(t)$ в k-м наблюдении; концентрации $C_{a,k}(t)$ и $C_{pg,k}(t)$ ненаблюдаемы;

A2) имеются статистические данные: $\{C_{pc,k,n,r}\,;\ r \in \{1, ..., N_{k,n}\},\ \ n \in \{1, ..., L_k\},\ k \in \{1, ..., K\}\}$, где $C_{pc,k,n,r}$ — концентрация вещества в зерне r-й популяции сельскохозяйственной культуры из k-го наблюдения в момент времени $t_{k,n}$ (полагаем $t_{k,0} = 0$);

A3) условное распределение $Q_k(dx, dy, z) = \mathbf{P}\{C_{a,k}(0) \in dx, C_{pg,k}(0) \in dy | C_{pc,k}(0) = z\}$ случайного вектора $(C_{a,k}(0), C_{pg,k}(0))$ относительно $C_{pc,k}(0)$ известно. В частности, распределение $Q_k(\cdot, z)$ может быть вырожденным.

При $n = 0, 1, ..., L_k$, определим для $C_{pc,k}$ (и, аналогично, для $C_{pg,k}$)

$$\mathsf{E}_{a,n}(C_{pc,k}(t_{k,m}),\ m = 0, ..., n) = \mathsf{E}\{C_{a,k}(t_{k,n}) | C_{pc,k}(t_{k,0}), ..., C_{pc,k}(t_{k,n})\}.$$

Пусть $p_{k,n}(x, y, z, x', y', z')$ обозначает условную плотность распределения $(C_{a,k}(t_{k,n}), C_{pg,k}(t_{k,n}), C_{pc,k}(t_{k,n}))$ относительно $(C_{a,k}(t_{k,n-1}), C_{pg,k}(t_{k,n-1}), C_{pc,k}(t_{k,n-1}))$, т.е.

$$\mathbf{P}\{(C_{a,k}(t_{k,n}), C_{pg,k}(t_{k,n}), C_{pc,k}(t_{k,n})) \in B | C_{a,k}(t_{k,n-1}) = x, C_{pg,k}(t_{k,n-1}) = y,$$
$$C_{pc,k}(t_{k,\ell-1}) = z\} = \int_B p_{k,n}(x, y, z, x', y', z') dx' dy' dz',$$

для множества $B \subset \mathfrak{B}(\mathsf{R}^3)$. Оценки $p_{k,n}(x, y, z, x', y', z')$, $\mathsf{E}_{a,k}(C_{pc,k}(t_{k,m}), m = 0, ..., n)$ и $\mathsf{E}_{pg,k}(C_{pc,k}(t_{k,m}), m = 0, ..., n)$ вычисляются по созданным алгоритмам, основанным на применении Марковской цепи процедур Монте–Карло моделирования траекторий СДУ и процедурах построения оптимальных ядерных интегральных оценок плотностей распределений. Используя данные из условия **(A2)**, оценки $\mathsf{E}_{a,k}(C_{pc,k}(t_{k,m}), m = 0, ..., n)$ и $\mathsf{E}_{pg,k}(C_{pc,k}(t_{k,m}), m = 0, ..., n)$ мы вычисляем оценки неизвестных параметров модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жакод Ж.*, *Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов в 2-х томах. Т. 2. Физматлит, 1994, 348 с.
2. *Колодий Н. А.*, *Колодий Т. И.* Вероятностная модель миграции химических веществ в экосистеме. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 5 (в печати).
3. *Маккоун Т. Е.*, *Даниэлс Дж. И.* Оценка воздействия загрязняющих веществ, поступающих в организм человека через воздух, воду и почву. — Норма токсикологии и фармокологии, 1991, №13, с. 36–61.