ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2016

А. Л. Якымив (Москва, МИРАН). **О порядке случайной A-подстановки.**

Порядком подстановки называется минимальная степень, в которой она равна тождественной подстановке. Как хорошо известно, всякая подстановка распадается на циклы. Зафиксируем множество $A \subseteq \mathbf{N}$. Подстановка σ называется A-подстановкой, если длины всех циклов σ принадлежат множеству A. Такие подстановки введены в [1]. Пусть $T_n(A)$ — совокупность всех A-подстановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассматривается случайная подстановка $\tau_n = \tau_n(A)$, равномерно распределенная на $T_n(A)$. Пусть $Z_n = Z_n(A)$ — порядок случайной подстановки τ_n. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что*

$$|T_n(A)|/n! = n^{\varrho-1} L_A(n), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

где функция $L_A(n)$ медленно меняется на бесконечности, а $\varrho \in (0,1]$. Тогда при $n \to \infty$ распределение последовательности с. в.

$$\left(\ln Z_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{\chi\{i \in A\} \ln i}{i}\right) \left(\frac{\varrho}{3} \ln^3 n\right)^{-1/2}$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Полученный результат обобщает известную предельную теорему из [2], где рассматривалось равномерное распределение на всей симметрической группе подстановок S_n (т. е., при $A = \mathbf{N}$), а также соответствующее утверждение из [3].

Пусть Y_n — произведение длин всех циклов подстановки τ_n. При доказательстве теоремы 1 существенно используются представления для с. в. $\ln Z_n$ и аппроксимирующей ее с. в. $\ln Y_n$ в виде кратных сумм и некоторые другие идеи работы [4], оценки из доказательства леммы 2 статьи [3] и тауберова теорема из [5].

Имеется широкий класс примеров множеств A, для которых выполнено (1) (см., например, работы [6–10]), небольшой обзор содержится в статье [11]. Мы здесь приведем только один пример.

Пример. Пусть множество A случайно, причем случайные величины $\eta_1 = \chi\{1 \in A\}$, $\eta_2 = \chi\{2 \in A\}, \ldots$ независимы в совокупности и $\mathbf{P}\{\eta_n = 1\} \to \varrho > 0$ при $n \to \infty$. Тогда для почти всех реализаций множества A справедливо (1). Поэтому, согласно теореме 1, для произвольного фиксированного действительного x

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\ln Z_n - \sum_{i \in A,\ i \leqslant n} \ln(i)/i}{\sqrt{(\varrho/3)\ln^3 n}} \leqslant x \,\middle|\, A\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \text{ п.н.}$$

К настоящему моменту рядом авторов получены предельные теоремы для логарифма порядка случайных подстановок, имеющих те или иные распределения на S_n (в основном, это — равномерные распределения на некоторых подмножествах S_n). Краткий обзор в этом направлении содержится в заметке [12].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00318).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
2. *Erdős P.*, *Turán P.* On some problems of a statistical group theory III. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1967, v. 18, № 3–4, p. 309–320.
3. *Якымив А. Л.* Предельная теорема для логарифма порядка случайной A-подстановки. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, № 1, с. 126–149.
4. *DeLaurentis J. M.*, *Pittel B. G.* Random permutations and Brownian motion. — Pacific J. Math., 1985, v. 119, № 2, p. 287–301.
5. *Якымив А. Л.* Тауберова теорема для кратных степенных рядов. — Матем. сб., 2016, т. 207, № 2, с. 143-172.
6. *Волынец Л. М.* Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 85–90.
7. *Колчин В. Ф.* О числе циклов подстановок с ограничениями на длины циклов. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 2, с. 97–109.
8. *Павлов А. И.* О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. сб., 1986, т. 129, № 2, с. 252–263.
9. *Павлов А. И.* О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, № 3, с. 109–123.
10. *Павлов А. И.* О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. заметки, 1997, т. 62, № 6, с. 881–891.
11. *Якымив А. Л.* Распределение длины m-го максимального цикла случайной A-подстановки. — Дискретн. матем., 2005, т. 17, № 4, с. 40–58.
12. *Yakymiv A. L.* Distribution of the order in some classes of random mappings. — In: XVII-th International Summer Conference on Probability and Statistics (ISCPS-2016) Seminar on Statistical Data Analysis Workshop on Branching Processes and Applications. (Pomorie, Bulgaria, 25 Jun – 1 July 2016.) Conference Proceedings and Abstracts. / Ed. by E. Stoimenova, M. Slavtchova-Bojkova. Sofia: Inst. Math. Inform. BAS, 2016, p. 42–50. http://www.math.bas.bg/ statlab/ISCPS2016/ISCPS