ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2017

А. В. Калинкин, О. А. Белякова (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **Статистическое моделирование марковского процесса «конкуренции» $T_1+T_2\to T_1,T_2;\ \ 2T_1\to T_1;\ \ 2T_2\to T_2;\ \ T_1\to 2T_1;\ \ T_2\to 2T_2$ и результаты экспериментов Г. Ф. Гаузе.**

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$, $t\in[0,\infty)$, на множестве состояний $N^2=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha_1,\alpha_2=0,1,\ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=\mathbf{P}\{\xi(t)=(\beta_1,\beta_2)\mid\xi(0)=(\alpha_1,\alpha_2)\}$ которого при $t\to 0+$ представимы в виде ($\rho\geqslant 0,\ \ \mu_1\geqslant 0,\ \ \mu_2\geqslant 0,\ \ \lambda_1\geqslant 0,\ \ \lambda_2\geqslant 0;\ \ p_1\geqslant 0,\ \ p_2\geqslant 0,$ $p_1+p_2=1$)

$$P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=(p_2\rho\alpha_1\alpha_2+\mu_1\alpha_1(\alpha_1-1))t+o(t),\ P_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=\lambda_1\alpha_1 t+o(t),$$
$$P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=(p_1\rho\alpha_1\alpha_2+\mu_2\alpha_2(\alpha_2-1))t+o(t),\ P_{(\alpha_1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=\lambda_2\alpha_2 t+o(t),$$
$$P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)=1-(\rho\alpha_1\alpha_2+\mu_1\alpha_1(\alpha_1-1)+\mu_2\alpha_2(\alpha_2-1)+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)t+o(t).$$

Производящая функция переходных вероятностей $F_\alpha(t;s)=\sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty}P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}$, $|s_1|\leqslant 1$, $|s_2|\leqslant 1$, удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\rho(p_1s_1+p_2s_2-s_1s_2)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_2}+\mu_1(s_1-s_1^2)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1^2}+ \tag{1}$$
$$\mu_2(s_2-s_2^2)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_2^2}+\lambda_1(s_1^2-s_1)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1}+\lambda_2(s_2^2-s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2},\ F_\alpha(0;s)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}.$$

Из уравнения (1) можно получить [1] систему нелинейных дифференциальных уравнений [2] ($x_1(t),x_2(t)$ — количество особей первого и второго видов в момент t)

$$\dot x_1=-p_2\rho x_1x_2-\mu_1x_1^2+\lambda_1x_1,\ \dot x_2=-p_1\rho x_1x_2-\mu_2x_2^2+\lambda_2x_2,\ \ x_1(0)=x_1^0,\ x_2(0)=x_2^0. \tag{2}$$

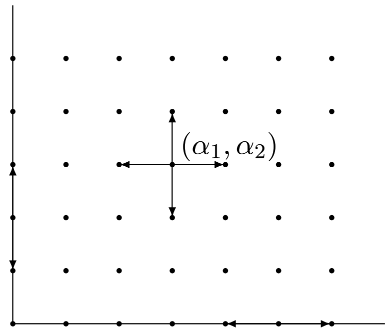

Рис. 1.

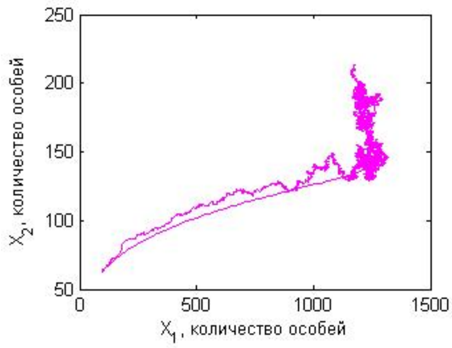

Рис. 2.

Скачки процесса рождения и гибели квадратичного типа показаны на рис. 1. Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ при $t \to \infty$ оказывается в одном из множеств состояний $\{(1,0), (2,0), \ \ldots\}$ или $\{(0,1), (0,2), \ \ldots\}$. На рис. 2, 3 даны графики функций $x_1(t), x_2(t)$ и примеры реализаций марковского процесса «конкуренции»: колебания около точки стационарности $(x_1^c; x_2^c) = ((\lambda_1\mu_2 - p_2\lambda_2\rho^2)/(\mu_1\mu_2 - p_1p_2\rho^2), (\lambda_2\mu_1 - p_1\lambda_1\rho^2)/(\mu_1\mu_2 - p_1p_2\rho^2))$ системы (2), вырождение.

В работе [2] описаны многодневные эксперименты по наблюдению за количеством дрожжевых клеток *Saccharomyces cerevisiae* и *Schizosaccharomyces kefir* — с разным начальными числом особей и в различных аэробных условиях. Лабораторный анализ в [2] конкуренции двух видов привел к случаям, указанным на рис. 2, 3. Варианты поведения марковского процесса соответствуют «принципу исключения Гаузе» [2].

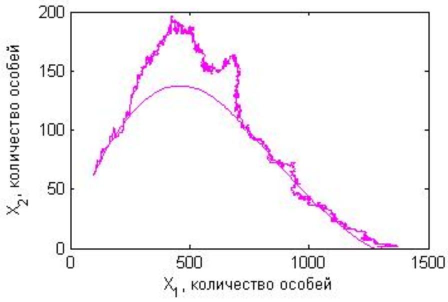

Рис. 3.

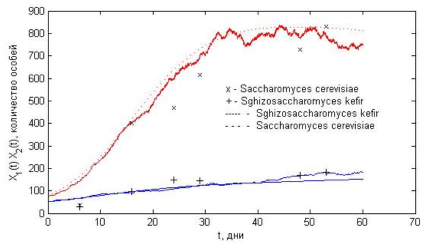

Рис. 4.

На рис. 4 приведены экспериментальные данные смешанного роста двух видов дрожжей [2] и детерминированные и стохастические реализации, полученые в [1]. Значения параметров $\rho = 0,000449$; $\mu_1 = 0,000129$; $\mu_2 = 0,000096$; $\lambda_1 = 0,16445$; $\lambda_2 = 0,055212$; $p_1 = 0,904232$; $p_2 = 0,095768$ (в обозначениях [2] имеем $b_1 = 0,16445$; $b_2 = 0,055212$; $K_1 = 1275$; $K_2 = 575$; $\beta_1 = 3,15$; $\beta_2 = 0,45$), начальные условия $x_1(0) = \xi_1(0) = 77$; $x_2(0) = \xi_2(0) = 52$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белякова О. А.* Стохастические модели взаимодействия двух видов и результаты экспериментов Г. Ф. Гаузе. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
2. *Gause G. F.* The Struggle for Existense. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934, 163 p. (Перепечатано: *Гаузе Г. Ф.* Борьба за существование. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 с.)
3. *Калинкин А. В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.