ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 24 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2017

А. В. Колчин (Москва, Московский автомобильно-дорожный государственный технический ун-т (МАДИ)). **Об асимптотическом поведении числа решений простейших уравнений в подстановках.**

Памяти Колчина Валентина Федоровича посвящается

Для решения широкого круга комбинаторных задач весьма плодотворным оказывается *вероятностный подход* [1, 2]. В частности, в вероятностной комбинаторике находит успешное применение *обобщенная схема размещения*, позволяющая сводить ряд комбинаторных задач к задачам о суммах независимых случайных величин, классическому объекту изучения в теории вероятностей. Обобщенная схема размещения была введена в [3] и заняла заметное место в асимптотических исследованиях в вероятностной комбинаторике. Свое название эта схема получила в связи с тем, что она является обобщением классической задачи о случайном размещении частиц по ячейкам [2].

Напомним, что в обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение *независимых* случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Пусть $\eta_1,\dots,\eta_N$ — неотрицательные целочисленные случайные величины, рассматриваемые как некоторые числовые характеристики комбинаторной структуры из N компонент, состоящей из n элементов, такие, что $\eta_1+\dots+\eta_N=n$. Если существуют независимые случайные величины $\xi_1,\dots,\xi_N$ такие, что совместное распределение $\eta_1,\dots,\eta_N$ допускает представление

$$\mathbf{P}\{\eta_1=k_1,\dots,\eta_N=k_N\}=\mathbf{P}\{\xi_1=k_1,\dots,\xi_N=k_N\mid\xi_1+\dots+\xi_N=n\},\qquad(1)$$

где $k_1,\dots,k_N$ — произвольные целые числа, то говорят, что $\eta_1,\dots,\eta_N$ образуют обобщенную схему размещения с параметрами n и N и независимыми случайными величинами $\xi_1,\dots,\xi_N$. Случайные величины $\eta_1,\dots,\eta_N$ интерпретируются как заполнения ячеек.

В силу независимости случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_N$, изучение многих характеристик обобщенной схемы размещения сводится к задачам о суммах независимых случайных величин. В случае, когда распределения слагаемых одинаковы и фиксированы (не зависят от числа слагаемых), можно пользоваться хорошо развитой теорией суммирования независимых случайных величин. Однако во многих применениях обобщенной схемы возникает необходимость в *локальных предельных теоремах в схеме серий.* Как правило (см., например, [4, 5], распределение случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_N$ представляется в виде

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{b_k\theta^k}{k!\,B(\theta)},\qquad(2)$$

где $b_0,b_1,b_2,\dots c$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел,

$$B(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k\theta^k}{k!},$$

и θ — параметр, принимающий положительные значения из области сходимости ряда $B(\theta)$. Если соотношение (1) справедливо при некотором θ, то оно остается верным при всех положительных θ из области сходимости ряда $B(\theta)$ (см., например, [4]). Для изучения характеристик обобщенной схемы размещения, как правило, требуются локальные предельные теоремы при всех значениях параметра θ. Основные случаи возможных областей изменения N и θ были рассмотрены в [5, 6, 7, 8].

Пусть $S_{n,R}$ есть множество всех подстановок степени n, длины циклов которых лежат в некотор ом множестве R натуральных чисел. Рассмотрим уравнение

$$X^d = e, \tag{3}$$

где X — подстановка степени n, а e — тождественная подстановка. Нетрудно видеть, что множество всех решений уравнения (3) в симметрической группе S_n, где d — простое число, совпадает с $S_{n,R}$ с $R\{1,d\}$; если же d — составное число и $1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_r = d$ — все различные делители числа d, то подстановка X является решением уравнения (3) тогда и только тогда, когда длины циклов X принадлежат $R = \{d_0, \ldots, d_r\}$.

Обозначим $T_n^{(d)}$ число решений уравнения (3), и пусть $a_{n,R}$ — число элементов множества $S_{n,R}$. Асимптотика чисел $a_{n,R}$ изучалась, например, в [9, 10] с использованием метода перевала. Как показано в [11, 12],

$$a_{n,R} = \frac{n!\, e^{B(\theta)}}{\theta^n} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(B(\theta))^N}{N!} e^{-B(\theta)} \mathbf{P}\{\xi_1 + \cdots + \xi_N = n\},$$

где

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\theta^k}{kB(\theta)}, \quad k \in R, \quad \text{и} \quad B(\theta) = \sum_{k\in R} \frac{\theta^k}{k}, \tag{4}$$

так что для нахождения асимптотики $T_n^{(d)} = a_{n,R}$ достаточно выбрать подходящее θ и, как в [5, 6, 7, 8], получить серию локальных предельных теорем для суммы независимых случайных величин, одинаково распределенных по закону (4).

Используя детали эффекта перехода распределений сумм независимых целочисленных случайных величин, одинаково распределенных по закону (2), с одной решетки на другую, подробно изученные в [6, 7, 8], получаем ранее не известные асимптотики для числа решений уравнения (3). Заметим, что в случае, когда значения параметра θ приближаются к границе сходимости ряда $B(\theta)$, могут появляться и другие предельные распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров В. Л.* Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1944, т. 8, №1, с. 3–48.
2. *Колчин В. Ф.*, *Чистяков В. П.* Комбинаторные задачи теории вероятностей. — Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей, математическая статистика, теоретическая кибернетика, 1974, т. 11, с. 5–45.
3. *Колчин В. Ф.* Один класс предельных теорем для условных распределений. — Лит. матем. сборник, 1968, т. 8, в. 1, с. 111–126.
4. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 207 с.
5. *Колчин А. В.* Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. — Дискретн. матем., 2003, т. 15, №4, с. 148–157.
6. *Колчин А. В.*, *Колчин В. Ф.* О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, №4, с. 113–127.
7. *Колчин А. В.*, *Колчин В. Ф.* Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения. — Дискретн. матем., 2007, т. 19, №3, с. 15–21.

8. Колчин А. В. Предельные теоремы в обобщенной схеме размещения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3, с. 432–435.
9. *Moser L.*, *Wyman M.* On solutions of $x^d = I$ in symmetric groups. — Canadian J. Math., 1955, v. 7, № 2, p. 159–168.
10. *Волынец Л. М.* О числе решений уравнения $x^s = e$ в симметрической группе. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 2, с. 155–160.
11. *Колчин В. Ф.* О числе подстановок с ограничениями на длины циклов. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 2, с. 97–109.
12. *Колчин А. В.* Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. — Дискретн. матем., 1994, т. 6, № 1, с. 100–115.