

А. В. Калинин, С. С. Кудряшов (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана). **Марковский процесс эпидемии SIRS** $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \rightarrow 2\mathbf{T}_2$; $\mathbf{T}_2 \rightarrow \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_3$; $\mathbf{T}_3 \rightarrow \mathbf{T}_1$.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс

$$\boldsymbol{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний $N^3 = \{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности

$$P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \mathbf{P}\{\boldsymbol{\xi} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0; p_1 \geq 0, p_3 \geq 0, p_1 + p_3 = 1$)

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2+1, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-1, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = p_1 \lambda_2 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2-1, \alpha_3+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = p_3 \lambda_2 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2, \alpha_3-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_3 \alpha_3 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = 1 - (\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3) t + o(t).$$

Производящая функция переходных вероятностей

$$F_{\boldsymbol{\alpha}}(t; s) = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}, \quad |s_1| \leq 1, \quad |s_2| \leq 1, \quad |s_3| \leq 1,$$

удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_{\boldsymbol{\alpha}}(t; s)}{\partial t} = \lambda_1 (s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_{\boldsymbol{\alpha}}(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (p_1 s_1 + p_3 s_3 - s_2) \frac{\partial F_{\boldsymbol{\alpha}}(t; s)}{\partial s_2} + \lambda_3 (s_1 - s_3) \frac{\partial F_{\boldsymbol{\alpha}}(t; s)}{\partial s_3}$$

с начальным условием $F_{\boldsymbol{\alpha}}(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$. Из второго уравнения «предельным переходом» выводится [2] нелинейная система дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 x_2 + p_1 \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 x_2 - \lambda_2 x_2,$$

$$\dot{x}_3 = p_3 \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3,$$

с начальным условием $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_3(0) = x_3^0$, где $x_1(t)$ — количество «восприимчивых к заболеванию» (S — susceptible), $x_2(t)$ — количество «инфицированных» (I — infectious), $x_3(t)$ — количество «выздоровевших с иммунитетом» (R — recovered (or immune), см. [1]) в момент t , $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0$.

Точками стационарности системы являются

$$(x_1^{1c}, x_2^{1c}, x_3^{1c}) = (x_1^0 + x_2^0 + x_3^0, 0, 0)$$

и

$$(x_1^{2c}, x_2^{2c}, x_3^{2c}) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_3 + p_3\lambda_2}, \frac{p_3\lambda_2(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_3 + p_3\lambda_2} \right).$$

На рис. 1, 2 даны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и пример реализации марковского процесса [2], [3].

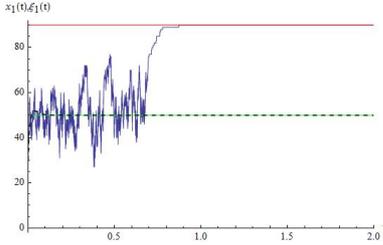


Рис. 1

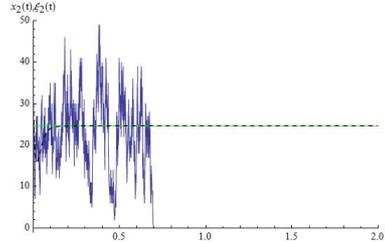


Рис. 2

Значения параметров: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 250$; $\lambda_3 = 20$; $p_1 = 0,95$; $p_3 = 0,05$.

Начальные условия: $x_1^0 = \alpha_1 = 30$; $x_2^0 = \alpha_2 = 30$; $x_3^0 = \alpha_3 = 30$; $x_1^{2c} = 50$; $x_2^{2c} \approx 24,62$; $x_3^{2c} \approx 15,38$.

Отметим, что $\xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ при $t \rightarrow \infty$ вырождается с вероятностью 1 в состоянии $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 0, 0)$.

На рис. 3 и 4 представлены двумерные гистограммы квазистационарного распределения (при условии невырождения) для значений чисел $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ частиц типов T_1 , T_2 и чисел $\xi_1(t)$, $\xi_3(t)$ частиц типов T_1 , T_3 .

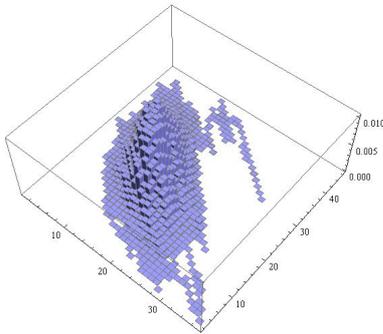


Рис. 3

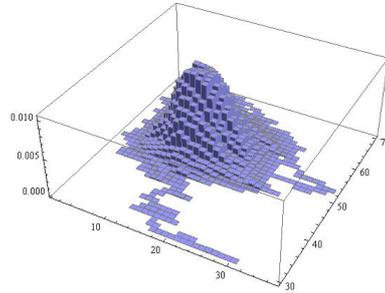


Рис. 4

Значения параметров: $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = 250$; $\lambda_3 = 5$; $p_1 = 0,95$; $p_3 = 0,05$.

Начальные условия: $\alpha_1 = 30$; $\alpha_2 = 30$; $\alpha_3 = 30$;

Время моделирования: $t = 4$.

Точки стационарности: $x_1^{2c} = 12,5$; $x_2^{2c} \approx 22,14$; $x_3^{2c} \approx 55,36$.

При большом значении λ_2 гистограммы близки к графику плотности двумерного нормального распределения [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_modelling_of_infectious_disease
https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
2. *Кудряшов С. С.* Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с.
3. *Калинкин А. В.* Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 44 с.
<http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1630.html>