

С. Е. Холодовский (Чита, ЗабГУ). О решении смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в полуполосе, ограниченной слабопроницаемой пленкой.

Рассмотрим для функции $u(x, y)$ в полуполосе $D = (-\infty < x < 0) \times (0 < y < l)$ краевую задачу

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=l} = \psi(x), \quad Bu_x + u|_{x=0} = h(y), \quad (1)$$

где $u_x = \partial u / \partial x$. Граничное условие при $x = 0$ соответствует условию на слабопроницаемой пленке с параметром $B > 0$ [1]. Здесь заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(y)$ считаются такими, для которых классическая задача Дирихле в полуполосе D вида

$$\Delta f(x, y) = 0, \quad f|_{y=0} = \Phi(x), \quad f|_{y=l} = \Psi(x), \quad f|_{x=0} = h(y) \quad (2)$$

корректна, где

$$\Phi(x) = B\varphi'(x) + \varphi(x), \quad \Psi(x) = B\psi'(x) + \psi(x).$$

Решение задачи Дирихле (2) строится в квадратурах методом функции Грина [2]. Решение $u(x, y)$ задачи (1) выражается через решение $f(x, y)$ задачи (2) также в квадратурах.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ является решением корректной задачи (2) и эта функция вместе с производными, входящими в задачу (2), а также функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ имеют асимптотику $O(e^{\alpha|x|})$, $0 < \alpha < \gamma$, то задача (1) корректна и ее решение выражается через функцию $f(x, y)$ по формуле

$$u(x, y) = \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma z} f(x - z, y) dz, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{B}, \quad (3)$$

при этом оператор, обратный оператору (3), имеет вид

$$f(x, y) = Bu_x(x, y) + u(x, y).$$

Отметим, что условие на заданные функции при $x \rightarrow -\infty$ достаточно слабое, т. е. интеграл (3) является быстросходящимся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холодовский С. Е. О многослойных пленках на границе полупространства. — Матем. заметки, 2016, т. 99, в. 3, с. 421–427.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.