ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2019

А. К. Горшенин (Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ). **О выявлении смешанного нормального сигнала на фоне смешанного гауссовского шума.**

Предположим, что исходные наблюдения представляют собой реализацию с. в. $Z = X + Y$, где с. в. X соответствует полезному сигналу в данных, а с. в. Y описывает шум измерительного оборудования, обусловленный набором факторов, в том числе случайного характера. При этом с.в. X и Y являются независимыми. Будем считать, что до начала эксперимента есть возможность получить набор наблюдений, являющихся реализацией только с. в. Y. Данная ситуация соответствует случаю, когда при регистрации сигналов в реальном эксперименте за счет его организации возможно заранее получить набор наблюдений, которые описывают только шум, распределение которого существенно отличается стандартного нормального, а параметры неизвестны [1].

Пусть распределение с. в. Y может быть представлено в виде конечной смеси нормальных законов с неизвестными параметрами. Тогда, используя, например, одну из версий EM-алгоритма и метода скользящего разделения смесей [2], можно получить оценки максимального правдоподобия соответствующих параметров и считать данное распределение заданным, т. е.

$$Y \sim \sum_{j=1}^{\widetilde{k}} \widetilde{p}_j \Phi\left(\frac{x-\widetilde{a}_j}{\widetilde{\sigma}_j}\right)$$

со стандартными ограничениями на известные (оцененные) параметры. Предположим, что распределение с. в. X также может быть описано конечной смесью нормальных распределений, т. е.

$$X \sim \sum_{j=1}^{k} p_j \Phi\left(\frac{x-a_j}{\sigma_j}\right) \tag{1}$$

со стандартными ограничениями на неизвестные параметры. Возникает задача восстановления данного распределения с помощью метода скользящего разделения смесей для реализаций с. в. Z, распределение которой, как несложно показать, имеет вид:

$$Z \sim \sum_{l=1}^{k\cdot\widetilde{k}} \widehat{p}_l \Phi\left(\frac{x-\widehat{a}_l}{\widehat{\sigma}_l}\right),$$

причем для неизвестных параметров справедливы следующие представления:

$$\widehat{p}_{(r-1)\widetilde{k}+j} = p_r \widetilde{p}_j, \quad \widehat{a}_{(r-1)\widetilde{k}+j} = a_r + \widetilde{a}_j, \quad \widehat{\sigma}^2_{(r-1)\widetilde{k}+j} = \sigma_r^2 + \widetilde{\sigma}_j^2 \tag{2}$$

сразу для всех индексов $r = \overline{1,k}$ и $j = \overline{1,\widetilde{k}}$. Относительно параметров p_r, a_r и σ_r^2, $r = \overline{1,k}$, система (2) является переопределенной, так как количество уравнений превышает число переменных. Рассмотрим несколько возможных вариантов решения на основе метода наименьших квадратов (МНК) и максимизации логарифмической функции правдоподобия. Введем следующие обозначения ($r = \overline{1,k}$, $\bigoplus$ — прямая сумма соответствующих матриц [3]):

$$\widetilde{A} = \widetilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{1}_{\widetilde{k}\times 1}, \quad \widetilde{\Sigma} = \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{1}_{\widetilde{k}\times 1}, \quad \mathcal{E} = \bigoplus_{r=1}^{k} \mathbf{1}_{\widetilde{k}\times 1},$$

$$\widetilde{\mathbf{a}} = (a_1, \ldots, a_{\widetilde{k}}), \quad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{\widetilde{k}}^2), \quad \widehat{\mathbf{p}}_r = (\widehat{p}_{(r-1)\widetilde{k}+1}, \ldots, \widehat{p}_{r\widetilde{k}}),$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_r = (a_{(r-1)\widetilde{k}+1}, \ldots, a_{r\widetilde{k}}), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_r = (\sigma^2_{(r-1)\widetilde{k}+1}, \ldots, \sigma^2_{r\widetilde{k}}), \quad \widetilde{\mathbf{p}}_r^{-1} = (\widetilde{p_1}^{-1}, \ldots, \widetilde{p_{\widetilde{k}}}^{-1}).$$

Утверждение 1. *Оценки параметров неизвестного распределения с. в.* X (1) *на основе МНК могут быть записаны в следующем виде*:

$$\mathbf{p} = \widetilde{k}^{-1}\left[\left(\widetilde{\mathbf{p}}_1^{-1}\,\widetilde{\mathbf{p}}_2^{-1}\,\cdots\,\widetilde{\mathbf{p}}_k^{-1}\right)\circ\widehat{\mathbf{p}}\right]\mathcal{E}, \quad \mathbf{a} = \widetilde{k}^{-1}\big(\widehat{\mathbf{a}}\,\mathcal{E} - \widetilde{A}\,\mathbf{1}_{1\times k}\big), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \widetilde{k}^{-1}\big(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathcal{E} - \widetilde{\Sigma}\,\mathbf{1}_{1\times k}\big),$$

где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_k)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\widehat{\mathbf{p}} = (\widehat{\mathbf{p}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{p}}_k)$, $\widehat{\mathbf{a}} = (\widehat{\mathbf{a}}_1 \cdots \widehat{\mathbf{a}}_k)$, $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdots \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_k)$, *а символ* $\circ$ *обозначает произведение Адамара* [4].

Теперь рассмотрим подход на основе функции правдоподобия. Введем следующие обозначения ($a_{r,j}$, $\sigma_{r,j}$ и $p_{r,j}$ определяются на основе формул (2), $(Z_1, \ldots, Z_n)$ — наблюдаемая выборка, $\varphi(\cdot)$ — плотность стандартного нормального распределения):

$$\boldsymbol{\varphi}_{h,j} = \left(\varphi\left(\frac{Z_h - a_{1,j}}{\sigma_{1,j}}\right), \ldots, \varphi\left(\frac{Z_h - a_{k,j}}{\sigma_{k,j}}\right)\right), \quad \mathbf{p}_j = (p_{1,j}, \ldots, p_{k,j}),$$

$$\mathcal{J}_j = \left(\log\left(\mathbf{p}_j\,\boldsymbol{\varphi}_{h,j}^T\right)\right)_{h=\overline{1,n}}.$$

Утверждение 2. *Оценки параметров неизвестного распределения с. в.* X (1) *на основе максимизации логарифмической функции правдоподобия могут быть записаны в следующем виде для всех* $r = \overline{1,k}$:

$$p_r = \widehat{p}_{(r-1)\widetilde{k}+J} \cdot \widetilde{p_J}^{-1}, \quad a_r = \widehat{a}_{(r-1)\widetilde{k}+J} - \widetilde{a}_J, \quad \sigma_r^2 = \widehat{\sigma}^2_{(r-1)\widetilde{k}+J} - \widetilde{\sigma}_J^2,$$

где номер J *определяется как решение оптимизационной задачи следующего вида*:

$$J = \arg\max_{j=\overline{1,\widetilde{k}}} \mathcal{J}_j\,\mathbf{1}_{n\times 1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-07-00717).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stein D. W. J.* Detection of random signals in Gaussian mixture noise. — IEEE Transactions on Information Theory, 1995, v. 41, is. 6, p. 1788–1801.
2. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Изд-во Московского ун-та, 2011, 512 с.
3. *Ayres F. J.* Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. New York: McGraw Hill Book Company, 1962.
4. *Halmos P. R.* Finite-Dimensional Vector Spaces. — Annals of Mathematics Studies. Number 7. Princeton: Princeton University Press, 1948.