

XXVI ВСЕРОССИЙСКАЯ  
ШКОЛА-КОЛЛОКВИУМ  
ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ  
(осенний семестр, 19 сентября — 9 октября 2022 г.)

---

Секция «Вероятностные аспекты теории функций  
и функционального анализа»

УДК 519.2

**ХОХЛОВ В. И.**

**«СЕПТАККОРД» МЕТОДОВ ПОИСКА  
ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫХ  
МОМЕНТНЫХ ТОЖДЕСТВ И ПЯТЫЙ ЭЛЕМЕНТ  
(К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ МЕТОДА СТЕЙНА)<sup>1)</sup>**

Новый метод получения моментных характеристических тождеств типа тождества Стейна изложен в контексте методов, разработанных для этой цели ранее. В основе метода лежит функционально-операторный подход.

*Ключевые слова и фразы:* аннулятор вероятностной меры, моментный оператор, ортогональные многочлены, производящий оператор, характеристизатор вероятностной меры, характеристики типа характеристик Стейна–Чена, характеристическое тождество.

**§ 1. Введение**

Развитие метода Стейна, без которого теперь трудно представить исследовательский инструментарий ряда областей прикладной теории вероятностей, в особенности области вероятностных методов дискретной математики, на протяжении всей своей пятидесятилетней истории происходит в двух основных направлениях. Одному из них — разработке методов поиска моментных характеристик распределений вероятностей — и посвящена эта работа. Отметим, что интерес к этому методу обусловлен, в первую очередь, его приспособленностью к получению оценки ошибки приближений для распределений сумм *зависимых* случайных величин.

Кроме того, в практически важных ситуациях этот метод дает возможность оценивать расстояния между допредельными и предельными (иногда называемыми целевыми и даже гнездовыми) распределениями и точно вычислять скорость сходимости в задачах стохастической аппроксимации, а также сравнивать пары распределений (см., например, [22], [2] и [15]).

---

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2022 г.

DOI [https://doi.org/10.52513/08698325.2022\\_29\\_1\\_7](https://doi.org/10.52513/08698325.2022_29_1_7)

<sup>1)</sup> От Редакции. Публикуется по решению Программного комитета ВШКСМ в качестве пленарного доклада в осеннем семестре XXVI Всероссийской Школы-коллоквиума по стохастическим методам (Дагомыс–Сочи, 19 сентября–9 октября 2022 г.)

В год пятидесятой годовщины публикации основополагающей классической работы Чарльза Стейна [25], из которой произросла щедро плодоносящая ветвь современной теории вероятностей, мы хотели бы привлечь внимание к существенным вехам развития его метода в том направлении, представленного, в частности, работами [18], [13], [16] и [21], которое сформировало господствующую на данный момент парадигму этого метода. До самого последнего времени потенциал, заложенный в основу этой парадигмы ее создателями, по-видимому, в полной мере оценен и использован ими не был. Такое положение дел изменило создание нового универсального метода получения характеристизационных тождеств, учитывающего возможность привлечения соображений алгебраического характера.

## § 2. Линейные характеристизационные тождества для распределений вероятностей в операторной постановке

Первоначально метод Стейна (или метод Стейна–Чена) основывался на двух моментных тождествах, справедливых для случайных величин, имеющих гауссовское или пуассоновское распределения соответственно. Эти тождества исключительно значимы из-за их так называемого *характеристического свойства*: если для какой-то случайной величины эти тождества выполняются на некотором специальном классе функций, то единственно возможным их распределением вероятностей может быть гауссовское или пуассоновское соответственно. (см. [25], [3]).

Впоследствии этот метод был успешно распространен на другие классические одномерные распределения, а также на некоторые многомерные и неклассические распределения (см., например, обзорные части работ [26], [21], [23], [7], [34], [15]).

Для применения метода Стейна требуется характеристизационное тождество, справедливое для конкретного распределения, и долгие годы прогресс в этой области исследований состоял как в получении таких тождеств разными способами, так и в разработке таких способов.

Согласно [22, с. 212], метод Стейна включает в себя две составляющие: первая заключается в сведении задачи получения оценки ошибки приближения одного распределения другим, хорошо изученным распределением, к задаче получения оценки для математического ожидания некоторого *функционала* от изучаемой случайной величины. Вторая составляющая представляет собой коллекцию способов получения оценок *математического ожидания*, возникающего в первой составляющей метода. Более того, в [22, с. 215] это толкование метода Стейна сопровождается метким замечанием о том, что главная идея, лежащая в основе метода Стейна — это *замена характеристической функции*, обычно используемой при доказательстве сходимости распределений, на некоторый *характеристический оператор*.

Все распределения, характеризующиеся операторами (20)–(23) являются членами семейства Пирсона в непрерывном случае или семейства Орда — в дискретном [24, 1]. В известном смысле несколько особняком стоит характеристическое тождество для кругового закона

$$\mathcal{A}_{\text{Semicircle}(2)} = \mathcal{X}^2 \mathcal{D} + 3 \mathcal{X} - 4 \mathcal{D}$$

с радиусом 2 (ср. [8, формула 3.1]).

### Список литературы

1. Afendras G., Balakrishnan N., Papadatos N. Orthogonal polynomials in the cumulative Ord family and its application to variance bounds. — Statistics. 2018, v. 52, is. 2, p. 364–392.
2. An Introduction to Stein's Method. /Ed. by A. D. Barbour, L. H. Y. Chen. Singapore: Singapore Univ. Press/World Sci. Publ., 2005. (Ser. Lect. Notes. V. 4.)
3. Chen L. H. Y. Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 3, p. 535–545.
4. Diaconis P. Stein's method for Markov chains: first examples In: Stein's Method: Expository Lectures and Applications. / Ed. by P. Diaconis, S. Holmes. Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2004, p. 27–43. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes—Monograph ser. V. 46.)
5. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. V. II. 2nd ed. N. Y. etc.: Wiley, 1971, xxvi+669 p.
6. Goldstein L., Reinert G. Distributional transformations, orthogonal polynomials, and Stein characterizations. — J. Theoret. Probab., 2005, v. 18, № 1, p. 237–260. // Гольдштейн Л., Райнерт Г. Преобразования распределений, ортогональные многочлены и характеристики Стейна. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 1, с. 28–50. (Русск. перев.)
7. Goldstein L., Reinert G. Stein's method for the Beta distribution and the Pólya–Eggenberger urn. — J. Appl. Probab., 2013, v. 50, № 4, p. 1187–1205.
8. Götze F., Tikhomirov A. N. Limit theorems for spectra of random matrices with martingale structure. — Theory Probab. Appl., 2007, v. 51, is. 1, p. 42–64. // Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 1, р. 171–192.
9. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. /Пер. с англ. А. А. Петрова под ред. Ю. В. Прохорова. М.: Мир, 1965, 275 с. // Grenander U. Probabilities on Algebraic Structures. N. Y.–London: Wiley, 1963, 218 p.
10. Хейер Х. Вероятностные меры на локально-компактных группах. /Пер. с англ. В. Г. Миранцева, С. А. Молчанова, В. В. Ульянова под ред. В. В. Сазонова. М.: Мир, 1981, 701 с. // Heyer H. Probability Measures on Locally Compact Groups. Berlin–Heidelberg: Springer, 1977, x+532 p.
11. Holmes S. Stein's method for birth and death chains. In: Stein's Method: Expository Lectures and Applications. / Ed. by P. Diaconis, S. Holmes. Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 2004, p. 45–67. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes—Monograph ser. V. 46.)
12. Hudson H. M. A natural identity for exponential families with applications in multiparameter estimation. — Ann. Statist., 1978, v. 6, № 3, p. 473–484.
13. Kattumannil S. K. On Stein Identity and Its Application. Statist. Probab. Lett., 2009, v. 79, is. 12, p. 1444–1449.
14. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. 4th ed., revised. Moscow: Fizmatlit, 1976, 544 p. (In Russian.)

15. *Ley N., Reinert G., Swan Y.* Stein's method for comparison of univariate distributions. — *Probab. Surveys*, 2017, v. 14, p. 1–52.
16. *Ley L., Swan Y.* A general parametric Stein characterization. — *Statist. Probab. Lett.*, 2016, v. 111, is. 3, p. 67–71.
17. *Ley L., Swan Y.* A unified approach to Stein characterizations. — *arXiv: 1105.4925v3* 2011, 28 p. <https://archive.org/details/arxiv-1105.4925>
18. *Liu J. S.* Siegel's formula via Stein's identities. — *Statist. Probab. Lett.*, 1994, v. 21, is. 3, p. 247–251.
19. *Marcinkiewicz J.* Sur une propriété de la loi de Gauss. — *Math. Z.*, 1938, v. 44, p. 612–618.
20. *Prakasa Rao B. L. S.* Characterizations of distribution through some identities. — *J. Appl. Probab.*, 1979, v. 16, № 4, p. 903–909.
21. *Reinert G.* Three general approaches to Stein's method. In: *An Introduction to Stein's method. Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Nat. Univ. Singapore. V. 4.* Singapore: Singapore Univ. Press, 2005, p. 183–221.
22. *Ross N.* Fundamentals of Stein's method. — *Probab. Surveys*, 2011, v. 8, p. 210–293.
23. *Reinert G., Röllin A.* Multivariate normal approximation with Stein's method of exchangeable pairs under a general linearity condition. — *Ann. Probab.*, 2009, v. 37, № 6, p. 2150–2173.
24. *Schoutens W.* Orthogonal polynomials in Stein's method. — *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, v. 253, p. 515–531.
25. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — In: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. II. Probability Theory.* Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
26. *Stein C.* *Approximate Computation of Expectations.* Hayward, CA: Inst. Math. Statist., Beachwood, Ohio: Inst. Math. Statist., 1986, iii+164 p. (Ser. Inst. Math. Statist. Lect. Notes–Monograph ser. V. 7.)
27. *Teerapabolarn K.* Stein's identity for discrete distributions. — *Internat. J. Pure Appl. Math.*, 2013, v. 83, № 4, p. 565–573.
28. *Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И.* Аннуляторы, пред-аннуляторы и характеризаторы вероятностных мер. — В сб.: *Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения–V».* Материалы конференции. (Ростов-на-Дону, 26 апреля–1 мая 2015 г.). / Под ред. А. Н. Карапетянца и др. Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 2015, с. 178–180. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I.* Annulators, pre-annulators and characterizers of probabilistic measures. — In: *International Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis—V”* (Rostov-on-Don, 26 April – 1 May 2015). Ed. by A. N. Karapetyants et al. Rostov-on-Don: DSTU Publ. Center, 2015, p. 178–180. (In Russian.)
29. *Viskov V. M., Maksimov M. V., Khokhlov V. I.* Characterization properties of Liu identity for multidimensional Gaussian distribution and Wey–Zhang–Li identity for Beta distribution. — In: *8 International Congress on Industrial and Applied Mathematics. Program and Abstracts* (Beijing, August 10–14, 2015). Section MS-Th-E-12-3. / Ed. by Z. Ma, L. Guo. Beijing: Beijing Univ., 2015, p. 257.
30. *Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И.* Характеризационное свойство тождества Вэй–Жанг–Ли для бета-распределения. — *Обзор прикл. и промышл. матем.*, 2015, т. 22, в. 4, с. 447–449. // *Viskov V. M., Maksimov V. M., Khokhlov V. I.* Characterization property of Wey–Zhang–Li identity for Beta distribution. — *OP&PM Surveys Appl. Industr. Math.*, 2015, v. 22, is. 4, p. 447–449. (In Russian.)

31. Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И. Характеризации типа Стейна–Чена одномерных вероятностных распределений (новая редакция). — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2020, т. 27, в. 4, с. 289–306. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I. Stein–Chen-like characterizations of one-dimensional probability distributions. (New edition.) — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2020, v. 27, is. 4, p. 289–306. (In Russian.)*
32. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Характеризационное тождество для распределения Паскаля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 4, с. 532–533. // *Viskov O. V., Prokhorov Yu. V., Khokhlov V. I. Characterizing identity for Pascal distribution. — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2013, v. 20, is. 4, p. 532–533. (In Russian.)*
33. Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И. Характеризационное тождество для биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, с. 136–137. // *Viskov O. V., Prokhorov Yu. V., Khokhlov V. I. Characterizing identity for the binomial distribution. — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2013, v. 20, is. 2, p. 136–137. (In Russian.)*
34. Волгин А. В. Об оценке точности многомерной нормальной аппроксимации сумм локально зависимых случайных векторов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 385–402. // *Volgin A. V. Accuracy of multidimensional normal approximation for sums of locally dependent random vectors. — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2015, v. 22, is. 4, p. 385–402. (In Russian.)*
35. Wey Zh., Zhang X., Li T. On Stein identity, Chernoff inequality, and orthogonal polynomials. — *Commun. Statist. Theory Methods*, 2010, v. 39, is. 14, p. 2573–2593.
36. Висков О. В., Максимов В. М., Хохлов В. И. Характеризационные моментные тождества для равновероятного и равномерного распределений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 1, с. 64–65. // *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I. Characterizing moment identities for the uniform and equiprobable distribution. — OP&PM Surveys Appl. Industr. Math., 2015, v. 22, is. 1, p. 64–65. (In Russian.)*

Поступила в редакцию  
27.VIII.2022

UDC 519.2

DOI <https://doi.org/10.52513/08698325.2022.29.1.7>

**Khokhlov V. I.** (Moscow, Steklov Mathematical Institute of RAS). “**Seventh chord**” of methods for searching characterizing moment identities and the fifth element. (Dedicated to 50th anniversary of Stein’s method.)

**Abstract:** A new method elaborated for obtaining Stein-like moment characterizing identities is founded and explained in the framework of four methods which were known earlier. The method is based on the functional-operator approach.

**Keywords:** annihilator of probability measure, generating operator, moment operator, orthogonal polynomial, characterizer of the probability measure, characterizing identity, Stein–Chen-like characterization.