

А. М. В е т о ш к и н (Москва, МГТУ МФ). **Жорданова форма линейной комбинации двух проекторов.**

УДК 512.643.8

DOI <https://doi.org/10.52513/08698325.2022.29.1.1>

Резюме: В работе показано, что в канонической форме жордана линейной комбинации проекторов $aP+bQ$ наблюдается следующая симметрия относительно значения $\beta = (a+b)/2$. Если есть несколько жордановых клеток $J_k(\lambda)$, $\lambda \notin \{\beta, a, b, 0, a+b\}$, т.е. ровно столько же клеток $J_k(2\beta - \lambda)$. Для клеток с $\lambda = a, b, 0, a+b$ симметрия несколько нарушена: если есть клетка $J_k(\lambda)$ с $k > 1$, то обязательно есть парная клетка $J_l(2\beta - \lambda)$, где $|k-l| \leq 1$. Клетки $J_k(\beta)$ имеют четный порядок.

Ключевые слова: проектор, жорданова нормальная форма, жордановы клетки, теорема Фландерса.

В работе [1] показано, что в канонической форме жордана разности проекторов $P - Q$ наблюдается следующая симметрия. Если есть несколько жордановых клеток $J_k(\lambda)$, $\lambda \neq 0, \pm 1$, т.е. ровно столько же клеток $J_k(-\lambda)$. Для клеток с $\lambda = 1, -1$ симметрия несколько нарушена: если есть клетка $J_k(\pm 1)$ с $k > 1$, то обязательно есть парная клетка $J_l(\mp 1)$, где $|k-l| \leq 1$.

Возьмем линейную комбинацию двух проекторов $F = aP + bQ$.

Обозначим: $\alpha = (a-b)/2$, $\beta = (a+b)/2$, $\tau = \alpha\beta$, $\mu = \lambda - \beta$.

Для линейной комбинации проекторов выполняется:

Теорема. Из того чтобы матрица F равнялась линейной комбинации двух проекторов:

$$F = aP + bQ, \quad a, b, a^2 - b^2 \neq 0,$$

для ее канонической жордановой формы следует выполнение следующих условий:

а) Жордановы клетки для собственных значений $\lambda \in \{\beta, a, b, 0, a+b\}$ входят в жорданову нормальную форму матрицы F строго парами — если есть несколько клеток $J_g(\lambda)$, т.е. ровно столько же клеток $J_g(2\beta - \lambda)$.

б) Жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы F для собственных значений a и b (0 и $a+b$) можно разбить на пары клеток $\{J_{g_i}(a), J_{h_j}(b)\}$, $\{J_{g_i}(0), J_{h_j}(a+b)\}$ так что $|g_i - h_j| \leq 1$. При этом в указанные пары клеток, должны входить все жордановы клетки порядка больше один. Клетки порядка один — $J_1(a), J_1(b)$ ($J_1(0), J_1(a+b)$) не обязательно входят в указанные пары клеток

в) Жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы F для собственного значения $\lambda = \beta$ должны иметь четный порядок.

В доказательстве этой теоремы важную роль играет теорема Фландерса [2]. (Теорема Фландерса объясняет как связаны жордановы формы матриц AB и BA .)

При выполнении условий а) и в) получаем результат обратный теореме:

Если для клеток жордановой нормальной формы матрицы F выполняется условие а) теоремы, то F есть линейная комбинация проекторов. Это следует из следующего примера, который приведем для одной пары клеток $J_k(\mu)$ и $J_k(-\mu)$. Для

краткости обозначим $Z = J_k(\mu)$.

$$aP + bQ = \begin{bmatrix} J_k(\mu) & 0 \\ 0 & J_k(-\mu) \end{bmatrix} + \beta I_{2k},$$

где

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} Z + \alpha I \\ S(\beta I - Z) \end{bmatrix} Z^{-1} [\beta I + Z(Z - \alpha I)S], \quad P^2 = P, \\ Q &= \frac{1}{2b} \begin{bmatrix} Z - \alpha I \\ -S(\beta I - Z) \end{bmatrix} Z^{-1} [\beta I - Z(Z + \alpha I)S], \quad Q^2 = Q, \\ S &= \text{diag}(1, -1, \dots). \end{aligned}$$

Выполнение условия в), т. е. четность размера клетки $J_k(\beta)$, влечет возможность представление этой клетки в виде линейной комбинации проекторов:

$$J_k(\beta) = ap + bq,$$

где

$$\begin{aligned} p &= I_{k/2} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau/a & 0 \end{pmatrix} + T_{k/2} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}, \quad p^2 = p, \\ q &= \frac{1}{b} I_{k/2} \otimes \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -\tau & \beta \end{pmatrix}, \quad q^2 = q. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ветошкин А. М.* Жорданова форма разности проекторов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, т. 54, № 3, с. 375–390.
2. *Flanders H.* Elementary divisors of AB and BA. — Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, p. 871–874.

UDC 517.956

DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Vetoshkin A. M. (Moscow, Bauman State Technical University). **Jordan's form of a linear combination of two projectors.**

Abstract: The paper shows that in the canonical Jordan form of a linear combination of projectors $aP + bQ$, the following symmetry is observed with respect to the value of $\beta = (a + b)/2$. If there are several Jordan cells $J_k(\lambda)$, $\lambda \notin \{\beta, a, b, 0, a + b\}$ then there are exactly the same number of cells $J_k(2\beta - \lambda)$. For cells with $\lambda = a, b, 0, a + b$, the symmetry is somewhat broken: if there is a cell $J_k(\lambda)$ with $k > 1$, then there must be a paired cell $J_l(2\beta - \lambda)$, where $|k - l| \leq 1$. Cells $J_k(\beta)$ are in even order.

Keywords: projector, Jordan normal form, Jordan cells, Flanders theorem.