ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 29 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2022

А. В. Калинкин, **С. С. Кудряшов** (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). **О квазистационарном распределении в марковском процессе эпидемии SIS $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_2}$; $\mathbf{T_2 \to T_1}$.**

УДК 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Резюме: Для марковского процесса эпидемии SIS приведены результаты статистического моделирования.

Ключевые слова: Марковский процесс в четверти плоскости, квазистационарное распределение, нормальный закон.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [0, \infty)$, на множестве состояний $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots\}$, переходные вероятности $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$ которого при $t \to 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$)

$$P_{(\alpha_1-1,\alpha_2+1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda_1\alpha_1\alpha_2 t + o(t),\ P_{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = \lambda_2\alpha_2 t + o(t),$$
$$P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) = 1 - (\lambda_1\alpha_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_2)t + o(t).$$

Производящая функция переходных вероятностей

$$F_\alpha(t; s) = \sum_{\beta_1,\beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2},$$

удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3], $|s_1| \leqslant 1$, $|s_2| \leqslant 1$,

$$\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t} = \lambda_1(s_2^2 - s_1 s_2)\frac{\partial^2 F_\alpha(t;s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2(s_1 - s_2)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_2},$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$. Из второго уравнения «предельным термодинамическим переходом» выводится [2] нелинейная система дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2,\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 x_2 - \lambda_2 x_2,$$

с начальным условием $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, где $x_1(t)$ — количество «восприимчивых к заболеванию» (S — susceptible), $x_2(t)$ — количество «инфицированных» (I — infectious, см. [1]) в момент t, $x_1(t) + x_2(t) = x_1^0 + x_2^0$. Точки стационарности системы $(x_1^{1c}, x_2^{1c}) = (x_1^0 + x_2^0, 0)$ и $(x_1^{2c}, x_2^{2c}) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_1(x_1^0 + x_2^0) - \lambda_2}{\lambda_1}\right)$.

На рис. 1, 2 даны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и пример реализации марковского процесса [2], [3]. Значения параметров $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 10$; начальные условия $x_1^0 = \alpha_1 = 10$; $x_2^0 = \alpha_2 = 20$. $x_1^{2c} = 20$; $x_2^{2c} = 10$. Отметим, что $\xi_1(t) + \xi_2(t) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ при $t \to \infty$ вырождается с вероятностью 1 в состоянии $(\alpha_1 + \alpha_2, 0)$. На рис. 3 представлена гистограмма квазистационарного распределения (при условии невырождения) для значений числа $\xi_1(t)$ частиц типа T_1. Значения параметров $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 10$; начальные условия $\alpha_1 = 20$; $\alpha_2 = 10$; время моделирования $t = 12$. $x_1^{2c} = 20$; $x_2^{2c} = 10$.

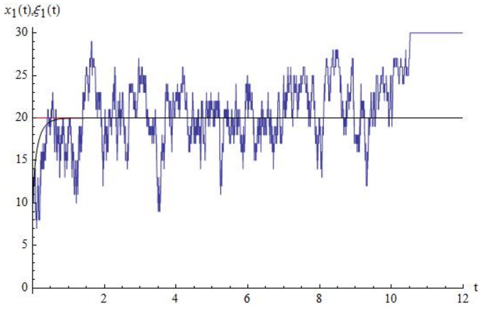

Рис. 1.

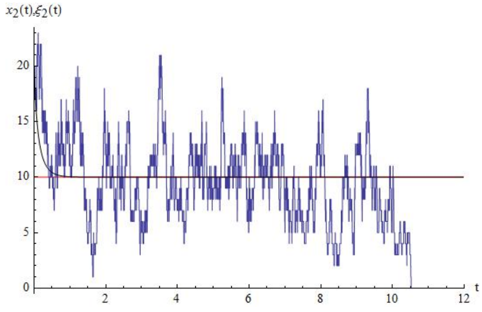

Рис. 2.

На рис. 4 представлена гистограмма (при условии невырождения) для значений числа $\xi_1(t)$ частиц типа T_1. Значения параметров $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 10$; начальные условия $\alpha_1 = 20$; $\alpha_2 = 20$; время моделирования $t = 40$. $x_1^{2c} = 10$; $x_2^{2c} = 30$. При больших значениях α_1, α_2 и широком интервале значений λ_1, λ_2 гистограмма квазистационарного распределения близка к нормальному закону [2] (ср. [4]).

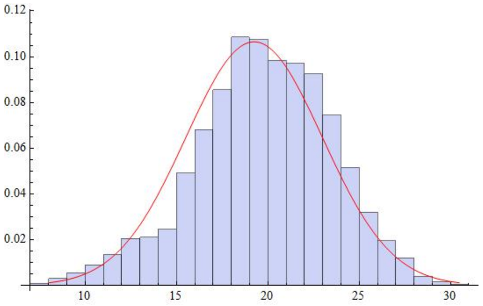

Рис. 3.

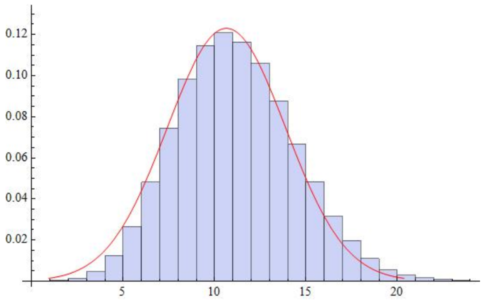

Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_modelling_of_infectious_disease https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
2. *Кудряшов С. С.* Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с.// *Kudryashov S. S.* Stochastic analogues of the main deterministic models of epidemics. Graduation thesis. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2014, 144 p. (In Russian.)
3. *Калинкин А. В.* Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 44 с.// *Kalinkin A. V.* Statistical modeling of Markov discrete systems with interaction. Moscow: Bauman Moscow State Technical University Publishers, 2017. 44 p. (In Russian.) https://bmstu.press/catalog/item/4847/
4. *Калинкин А. В.*, *Баварова Л. В.* О квазистационарном распределении марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T \to T$; $T \to 0, 2T$. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 2, с. 245–246.// *Kalinkin A. V.*, *Bavarova L. V.* On the quasi-stationary distribution of a Markov branching process with an interaction scheme $2T \to T$; $T \to 0, 2T$. — Review of Applied and Industrial Mathematics, 2011, v. 18, is. 2, p. 245–246. (In Russian.)

UDC 519.21 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Kalinkin A. V., ***Kudryashov S. S.*** (Moscow, Bauman Moscow State Technical University). **On quasi-stationary distribution in the Markov process of an epidemic SIS $\mathbf{T_1 + T_2 \to 2T_2}$; $\mathbf{T_2 \to T_1}$.**

Abstract: For the Markov process of the SIS epidemic, the results of statistical modeling are presented.

Keywords: Markov process in a quarter of the plane, quasi-stationary distribution, normal distribution.