

А. О. Ю л и н а (Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет). **Векторное исчисление в механике О. И. Сомова.**

УДК 531.091

Резюме: Петербургский математик и механик О. И. Сомов первый в России использовал аппарат векторного исчисления в курсе теоретической механики. Ему принадлежит введение математического понятия градиента, годографа, векторного произведения, линии и поверхности уровня, потенциала и их геометрического и векторного смысла.

Ключевые слова: О. И. Сомов, геометрическая производная, дифференциальный параметр, поворотное ускорение, ускорения высших порядков.

XIX век ознаменовался бурным развитием как теоретической, так и прикладной механики: появилось много работ по механике движения и соответствующего математического инструментария. Это было обусловлено промышленным переворотом и новыми военными запросами в начале XVIII века. Круг гениальных идей и новых проблем, с которыми столкнулся О. И. Сомов, был невероятно большим. Центральной заслугой Сомова было ведение в механику векторного исчисления. Сомов глубоко проработал труды Гамильтона и взял из них самое необходимое и полезное для изложения механики на принципиально новом уровне. Он проделал огромную работу по систематизации теоретической механики, как в методическом, так и в научном плане. Сомов обобщил работы Г. Ламе по координатам, Резаля по геометрическим производным, Кориолиса по ускорениям высших порядков, включив их в свою логически обоснованную, аналитически полностью завершённую и снабжённую новейшим математическим аппаратом «Рациональную механику», к анализу которой перейдем далее.

О. И. Сомов оставил богатое научное наследие в математике и механике. В теоретической механике он является одним из основателей общего аналитического метода постановки и решения фундаментальных задач кинематики и динамики. Эти задачи он великолепно выполняет, используя интегральное и дифференциальное исчисление, аппарат теории эллиптических функций, векторный анализ. Все вопросы механики Сомов рассматривает в тесной взаимосвязи с математикой. В его фундаментальных работах блестяще показано как математический анализ помогает раскрывать законы движения и действия сил природы с одной стороны, а с другой как механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. Однако же работы академика Сомова незаслуженно забыты. Постараемся восполнить этот пробел в данном докладе.

В динамике Сомов первый представил законченное аналитическое решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки с помощью аппарата эллиптических функций [10, 11].

Изложение кинематики с помощью векторного анализа также является заслугой О. И. Сомова. Большая часть его статей в этом направлении научной работы вошла в его учебник «Рациональная механика» («Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого или второго порядка в криволинейных координатах» [1];

«Об ускорении различных порядков в относительном движении» [2]; «Construct. des axes d'un ellipse» [3], «Преобразование прямолинейных координат в эллиптические» [4]; «Attract. d'un couche mince sur un point de sa surface» [5]; «О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем» [6]; «Доказательство Коши для уравнения равновесия» [7]; «Спрямление кривых линий» [8]; «Алгебраическое доказательство Гамильтонова начала» [9].) Поэтому далее подробно мы проанализируем его фундаментальный труд «Рациональная механика» [12]. Читая курс механики в С-Петербургском университете, Сомов разрабатывал изложение своих лекций рациональной механики, стараясь разъяснить теоретические основы, а также упростить доказательства многих предложений и приемов решения. Учебник Сомова предназначен студентам, изучающим физико-математические науки в университетах. Преподавание теоретической механики в классических (академических) школах, по мнению Сомова, должно быть направлено не только на ознакомление обучающихся с основными истинами, на которые опирается вся наука, но также и «изошрение учащихся в математическом анализе и геометрии» [12]. Математический анализ помогает раскрывать основные законы движения, а механика помогает развитию аналитических и геометрических методов исследования. История дифференциального и интегрального исчисления показывает, что механика была постоянно источником вопросов, для решения которых придумывали новые способы интегрирования функций и уравнений. Два внушительных тома Механики Эйлера фактически представляют сборники задач интегрального исчисления. В аналитической механике Лагранжа четко виден общий метод, следуя которому из одной формулы выводятся решения всех вопросов одного рода. Лекции по динамике Карла Якоби посвящены примерам, объясняющим способы интегрирования дифференциальных уравнений канонического вида и уравнений в частных производных первого порядка. Физико-математические исследования о гравитационных потенциалах, электричестве и магнетизме, теплоте, упругости, звуке, свете представляют собой учение о свойствах функций, их различных разложениях в ряды и об интегрировании линейных уравнений в частных производных. Сомов глубоко чувствовал внутренние связи между анализом, геометрией, механикой и математической физикой, которые он убедительно продемонстрировал в своей «Рациональной механике».

Обобщая опыт предшествующих изложений об ускорениях высших порядков, Сомов выходит на более высокий уровень абстракций, дает формулу для дифференцирования геометрического произведения, аналогичную с формулой Лейбница для дифференцирования алгебраического произведения и показывает, как она применяется для определения проекций скоростей и ускорений на данных, неподвижных или подвижных осях. Среди прорывных достижений Сомова в «Рациональной механике» назовем распространение правила умножения двух алгебраических сумм на геометрические суммы, способы выражения геометрическими производными какой-либо переменной прямолинейной длины при помощи скорости и ускорения крайних точек, геометрическое дифференцирование по разным переменным и некоторые предложения, относящиеся к геометрическим вариациям. Из всех обобщений и аналогий Сомов составил принципиально новый метод для кинематических исследований, заменяющий прежние синтетические приемы и облегчающий значительно приложения анализа к кинематике. Огромным значением этого новаторского метода было то, что он позволял избегать длинных выкладок, обусловленных, нередко без необходимости, использованием прямолинейных координат.

Поворотным моментом в истории изложения механики явилось введение понятия градиента, или, как его сначала называли, дифференциального параметра. Впервые его рассмотрел Г. Ламе в своем Курсе [13] как

$$p = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$$

«...общие выражения дифференциальных параметров. Стоит отметить, что эти параметры сохраняют тот же характер и ту же независимость, когда функции точки выражаются в криволинейных координатах.» («...Expressions générales des paramètres différentiels. Il s'agit de constater que ces paramètres conservent le même caractère et la même indépendance, quand les fonctions-de-point sont exprimées en coordonnées curvilignes»)

Сомов гениально обобщил понятие дифференциального параметра Ламе, придав ему роль универсальной характеристики.

Исключительно Сомову принадлежат формирование и изложение в анализе (теория поля) и механике таких понятий как линия уровня, поверхность уровня, потенциал.

Важным введением Сомова в приложение анализа к кинематике является прямой способ для определения дифференциальных параметров первого порядка от функции точки. Г. Ламе рассматривал дифференциальный параметр первого порядка функции точки как аналитическое выражение, в декартовых координатах [13]. Сомов представил дифференциальный параметр как отрезок, отложенный на нормали к поверхности уровня (касательной). Приняв такой геометрический образ параметра и, определив его независимо от системы координат как производную функции точки относительно перемещения нормального к поверхности уровня, Сомов показал прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядка и кривизны поверхности в каких либо координатных системах ортогональных или косоугольных. Этот способ составления дифференциальных параметров первого порядка охватывает все графические и аналитические способы для построения нормалей к поверхностям и кривым линиям. Сомов изложил его в 7-й главе своей Кинематики с новым развитием (после Ламе) и с приложением к определению координатных параметров наиболее типичных систем координат. Таким образом, Сомов придал дифференциальному параметру векторный смысл, что стало революционным поворотом в изложении механики.

В статье об ускорениях высших порядков [2], Сомов дает общие формулы для проекции скорости и ускорений различных порядков на три координатные параметра и на три другие, сопряженные с ними оси, которые называет осями координат, потом применяет эти формулы к выводу общих выражений движения в криволинейных координатах, определяющих кривые первого и второго порядка кривизны. В 10-й и 9-й главе выводы всех этих формул значительно упрощаются при помощи формул для проекций на направления этих параметров геометрических производных координатных параметров, как прямых, так и обратных. В 12-й главе Сомов приводит способы нахождения геометрических производных дифференциального параметра произвольной точки с помощью тех же выражений. Все вместе это составляет основание общей теории криволинейных координат, применение которых стало получать в геометрии и математической физике широкое распространение. В главах 12-й и 13-й Сомов показывает, как с помощью ускорений и геометрических производных дифференциальных параметров, составляются общие выражения для производных по времени от функции точки и функции системы точек, и как на основании этих выражений определяется общий вид условий, которым должны удовлетворять скорости и ускорения точек, когда они несвободны.

В кинематике неизменяемой системы Сомов сначала излагает свойства возможных скоростей свободной системы, основываясь на условиях для скоростей, вытекающих из неизменяемости расстояний между точками. После этого выводит те же свойства из формул, данных Эйлером для проекции возможной скорости на трех осях, неизменно связанных с телом, показывает связь между системой возможных скоростей и системой прямых, перпендикулярных к скоростям. Далее на основании формул Эйлера для определения проекций геометрической производной какой-либо длины на прямоугольных подвижных осях он обосновывает исследование об ускорениях высших порядков при движении неизменяемой системы.

Свойства возможных скоростей несвободной неизменяемой системы были иссле-

дованы В. Маннгеймом. Маннгейм рассматривал только тот случай возможных скоростей, когда тело опирается на неподвижную поверхность только в одной точке. Однако существует более общее условие, представляющие собой линейное уравнение, связывающие проекции поступательной скорости и вращательной скорости на три перпендикулярные оси, и такая зависимость практически реализуется. Сомов дает этой связи вид, независимый от системы координат, и показывает, как по данным условиям, число которых может быть больше 5, можно исследовать аналитически возможные скорости несвободной неизменяемой системы точек, определяя сопряженные оси вращения для всякой возможной системы скоростей, или сопряженные полюсы линейных комплексов.

Наконец в 17-й главе об относительном движении, с помощью геометрического дифференцирования, он выводит соотношения между скоростями и ускорениями различных порядков в абсолютном, переносном и относительном движении. Впервые в механике вводит векторное произведение, получая ускорение Кориолиса, которое называется поворотным.

Первая часть «Рациональной механики» (кинематика) Сомова была издана в 1872 году, в 1874 году была выпущена и неоконченная вторая часть (статика, динамика). После смерти автора эти два тома были переведены на немецкий язык в 1878 году. После Курса Сомова в механике прочно закрепился векторный анализ, впоследствии это привело к созданию теории поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Записки Императорской Академии наук т. VIII, 1865.
2. Записки Императорской Академии наук т. IX, 1865.
3. Nouv. annales, Terquem, т. XIX, 1860.
4. Записки Императорской Академии наук т. IX, 1866.
5. Записки Императорской Академии наук т. XIII, 1869.
6. Записки Императорской Академии т. XV, 1869.
7. Записки Императорской Академии т. XVII, 1870.
8. Записки Императорской Академии т. XVIII, 1870.
9. Записки Императорской Академии т. XIX, т. XVI, 1871.
10. Юлина А. О. К истории задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара. — История науки и техники, 2021 (12): 03-08.
11. Юлина А. О. История развития теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса, Сомова. — Таврический Вестник Информатики и Математики, с. 79–92.
12. Сомов О. И. Рациональная механика. Санкт-Петербург, типография императорской академии наук, 1872.
13. Lamé G. Lecons sur les coordonnees curvilignes. Paris, 1859.

UDC 531.091

A. O. Yulina (St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg.). **Vector calculus in Somov's mechanics**

Abstract: Petersburg mathematician and mechanic O.I. Somov was the first in Russia to use the apparatus of vector calculus in the course of theoretical mechanics. He owns introduction of the mathematical concept of gradient, hodograph, vector product, line and level surface, potential and their geometric and vector meaning.

Keywords: O.I. Somov, geometric derivative, differential parameter, rotational acceleration, higher order accelerations.