ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 29 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2022

Э. Г. Янукян (Пятигорск, СКФУ). **Влияние гидродинамических факторов на кинетику растворения полидисперсных систем частиц.**

УДК 532.73 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Резюме: Разработана методика учета гидродинамических факторов на растворение полидисперсной системы частиц в канале круглого сечения. Для анализа нелинейных задач эволюции полидисперсных систем частиц используется подход, который состоит в применении кинетических уравнений типа Фоккера–Планка для плотности распределения элементов новой фазы по размерам. Задача решена в замкнутой форме для широкого интервала параметров, соответствующих реальным химико-технологическим процессам. Полученные результаты позволяют рассчитывать важнейшие технологические характеристики процесса растворения и выявлять оптимальные режимы реализации процесса.

Ключевые слова: гидродинамические факторы, кинетика растворения, полидисперсная система частиц, технологические характеристики.

Рассматривается одномерное течение двухфазной полидисперсной среды, движущейся в канале круглого сечения. Увлекаемые потоком молекулы растворенного вещества и макроскопические частицы наряду с систематическим совершают и случайные перемещения, приводящие к диффузионному переносу вещества, вызванному различными причинами гидродинамической природы. Следует ожидать, что в потоке с произвольным гидродинамическим режимом течения эффективный коэффициент осевой диффузии может зависеть от следующих параметров: кинематической вязкости среды ν; скорости потока u; радиуса канала R; коэффициента молекулярной диффузии D и высоты шероховатости стенки канала d, влияние которой проявляется только при турбулентном течении среды. В соответствии с π — теоремой теории размерностей из этих величин можно составить четыре безразмерных комплекса, связанных между собой критериальным уравнением [1]:

$$\frac{D_{\text{эф}}}{uR} = \Phi\Big[\Big(\frac{Ru}{\nu}\Big), \Big(\frac{\nu}{D}\Big), \Big(\frac{d}{R}\Big)\Big], \tag{1}$$

т. е. $D_{\text{эф}}$ в общем случае является функцией чисел Рейнольдса, Шмидта и относительной шероховатости стенки.

Рассмотрим установившееся ламинарное или изотропно-турбулентное течение двухфазной полидисперсной среды в полуограниченном канале. Примем гипотезу квазигомогенности о том, что расстояния, на которых параметры течения смеси меняются существенно, намного больше размеров частиц и расстояний между ними. Будем считать, что включения, размеры которых являются непрерывной случайной величиной, достаточно многочисленны, что бы их гранулометрический состав можно было описать непрерывной функцией плотности распределения по размерам [2]. Случайные перемещения включений в потоке учтем коэффициентом $D_{\text{эф}}$. Если движение такой среды сопровождается фазовым переходом, приводящим к изменению размеров включений r со скоростью $v(r,1)$, то кинетическое уравнение для их функции плотности распределения по размерам примет вид

$$u\frac{\partial f}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial r}(f\nu) - D_{\text{эф}}\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = \delta(l-l_0)uf_0(r). \tag{2}$$

Линейную скорость растворения одиночной частицы определим в виде [3]:

$$v(r,1) = -\beta(r)\varphi[S(1)]. \tag{3}$$

Для решения поставленной задачи, воспользуемся следующим интегральным преобразованием Фурье

$$\overline{f}(\nu) = \int_0^\infty \frac{\nu\cos\nu x + h\sin\nu x}{\sqrt{\nu^2+h^2}} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где h — произвольная постоянная, определяемая из условий задачи. Формула обращения имеет вид

$$f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\nu\cos\nu x + h\sin\nu x}{\sqrt{\nu^2+h^2}}\overline{f}(\nu)\,d\nu. \tag{5}$$

Переходя в уравнении к Фурье-образам (4) по координате y получим

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\nu^2\overline{V}(z\nu) + \frac{d\overline{V}}{dz} + V_0\exp\Big\{-\frac{\mathrm{Pe}}{2}y\Big\}\frac{\nu\cos\nu y_0 + \frac{\mathrm{Pe}}{2}\sin\nu y_0}{\sqrt{\nu^2+\frac{\mathrm{Pe}^2}{4}}} = 0 \tag{6}$$

при условии

$$\lim_{z\to\infty}\overline{V}(z,\nu) = 0, \tag{7}$$

где $\overline{V}(z,\nu)$ — изображение функции $V(z,y)$.

Разрешив уравнение (6) с граничным условием (7) и вычисляя оригинал по формуле обращения (5) с использованием изменения порядка интегрирования, находим

$$\begin{aligned} V(z,y) \;=\; & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\int_z^\infty \frac{V_0(\eta)}{\sqrt{\eta - z}}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{Pe}}{2}y_0\Big\}\Big\{\exp\Big\{-\frac{(y_0+y)^2}{4(\eta-z)}\mathrm{Pe}\Big\} \\ & +\;\exp\Big\{-\frac{(y-y_0)^2}{4(\eta-z)}\mathrm{Pe}\Big\}\Big\}d\eta - \frac{\mathrm{Pe}}{2}\int_z^\infty V_0(\eta)\exp\Big\{\frac{\mathrm{Pe}}{2}\Big(\frac{\eta-z}{2}+y\Big)\Big\} \\ & \times\; erfc\Big[\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Pe}}\Big(\sqrt{\eta-z}+\frac{y+y_0}{\sqrt{\eta-z}}\Big)\Big]d\eta. \end{aligned} \tag{8}$$

Возвращаясь в выражении (8) к первоначальным безразмерным переменным получим решение задачи, отражающее изменение по длине канала функции плотности распределения включений по размерам, в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) \;=\; & \frac{1}{2\beta_0(x)}\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\int_x^\infty \frac{u_0(\xi)}{t}\Big\{\exp\Big\{-\mathrm{Pe}y_0 - \frac{\mathrm{Pe}}{4}\Big(t-\frac{y+y_0}{t}\Big)^2\Big\} \\ & +\;\exp\Big\{-\frac{\mathrm{Pe}}{4}\Big(t-\frac{y-y_0}{t}\Big)^2\Big\}\Big\}d\xi - \frac{\mathrm{Pe}}{2\beta_0(x)}\exp\{\mathrm{Pe}y\}\int_x^\infty u_0(\xi) \\ & \times\; erfc\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(t+\frac{y+y_0}{t}\Big)\Big]d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

Полученные выражения для функции плотности распределения включений по размерам (9) позволяют рассчитать профиль их концентрации по длине канала, который определяется начальным моментом нулевого порядка функции $f(r,l)$, и в безразмерных переменных после смены порядка интегрирования и вычисления квадратур примет вид

$$\mu_0(y) \;=\; \int_0^\infty U(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty U_0(\xi)\Big\{\Big[1 + erf\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q - \frac{y-y_0}{q}\Big)\Big] - \exp\{\mathrm{Pe}(y-y_0)\}$$
$$\times\; erfc\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q + \frac{y-y_0}{q}\Big)\Big]H(y_0-y) + \Big[\exp\{-\mathrm{Pe}(y_0-y)\} + \exp\{-\mathrm{Pe}(y_0-y)\}$$
$$\times\; erf\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q - \frac{y_0-y}{q}\Big)\Big] - erfc\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q + \frac{y-y_0}{q}\Big)\Big]H(y_0-y)$$
$$-\; \mathrm{Pe}(y+y_0+q^2)\exp\{\mathrm{Pe}y\}$$
$$\times\; erfc\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q + \frac{y+y_0}{q}\Big)\Big] + 2q\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\exp\Big\{\mathrm{Pe}y - \frac{\mathrm{Pe}}{4}\Big(q + \frac{y+y_0}{q}\Big)^2\Big\}\Big\}d\xi. \qquad (10)$$

Соотношение (10) должно удовлетворять уравнению сохранения интегрального баланса числа частиц для произвольного сечения потока, которое можно получить из исходного уравнения (2), проинтегрировав его по r в пределах $(0,\infty)$.

В безразмерных переменных оно примет вид

$$\frac{d\mu_0}{dt_j} - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{d^2\mu_0}{dy^2} + \lim_{x\to 0}(u\beta_0) = \delta(y-y_0)\mu_0^*, \qquad (11)$$

с граничными условиями

$$\mu_0\big|_{y=0} - \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{d\mu_0}{dy}\Big|_{y=0} = 0; \qquad \lim_{y\to\infty}\mu_0(y) = 0. \qquad (12)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что выражение (10) является решением уравнения (11) с граничными условиями (12). Источниковое слагаемое в левой части этого уравнения, которое появляется естественным образом при интегрировании исходной задачи, представляет собой число частиц, полностью растворяющихся в единице объема суспензии в единицу времени в сечении потока с координатой y. Вычислив предел, получим для интенсивности «исчезновения» включений следующее безразмерное выражение

$$I(y) \;=\; \lim_{x\to 0}(U\beta_0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Pe}}{\pi}}\int_0^\infty \frac{U_0(\xi)}{q}\Big\{\exp\Big\{-\mathrm{Pe}y_0 - \frac{\mathrm{Pe}}{4}\Big(q - \frac{y+y_0}{q}\Big)^2\Big\}$$
$$+\; \exp\Big\{-\frac{\mathrm{Pe}}{4}\Big(q - \frac{y-y_0}{q}\Big)^2\Big\}\Big\}d\xi$$
$$-\; \frac{\mathrm{Pe}}{2}\exp\{\mathrm{Pe}y\}\int_0^\infty U_0(\xi)erfc\Big[\frac{\sqrt{\mathrm{Pe}}}{2}\Big(q + \frac{y+y_0}{q}\Big)\Big]d\xi. \qquad (13)$$

Это слагаемое есть следствие полидисперсности состава частиц, приводящей к тому, что в каждом сечении потока с некоторой вероятностью присутствуют включения всех размерных групп, в том числе и частицы исчезающе малых размеров, которые в ходе растворения непрерывно выбывают из интегрального баланса.

Таким образом, использование функции плотности распределения включений по размерам $f(r,l)$ и кинетического уравнения (2) для нее позволяет оценить физический смысл и структуру источникового члена (13) в уравнении (11) для численной концентрации частиц, обусловленного полидисперсностью их гранулометрического состава. Без учета этого слагаемого, которое можно получить только из решения кинетического уравнения (2), правильное определение профиля концентраций растворяющихся включений по длине канала было бы невозможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1988, 336 с.
2. *Янукян Э. Г.* Колебательные процессы кристаллизации и растворения полидисперсных систем частиц. Ростов-на-Дону: Ростиздат, 2004, 169 с.
3. *Yanukyan E. G.* Modeling of heat and mass transfer in particulate systems complicated by phase and chemical transitions. — Collection of abstracts of the First SIAM - EMS Conference "Applied Mathematics in our Changing World". Berlin, Germany, 2001, p. 57.

UDC УДК 532.73 DOI https://doi.org/10.52513/08698325_2022_29_1_1

Yanukyan E. G. (Pyatigorsk, NCFU)**. Influence of hydrodynamic factors on the kinetics of dissolution of polydisperse particle systems**

Abstract: A method for taking into account hydrodynamic factors for the dissolution of a polydisperse system of particles in a circular channel has been developed.

For the analysis of nonlinear problems of the evolution of polydisperse particle systems, an approach is used, which consists in the application of kinetic Fokker-Planck type equations for the density of the distribution of elements of the new phase in size. The problem is solved in a closed form for a wide range of parameters corresponding to real chemical-technological processes. The results obtained allow us to calculate the most important technological characteristics of the dissolution process and identify optimal modes of process implementation.

Keywords: hydrodynamic factors, kinetics of dissolution, polydisperse system of particles, technological characteristics.